

## ПРИКЛАДНА МЕХАНІКА

УДК 62-236.58

DOI: <https://doi.org/10.32515/2414-3820.2026.56.256-270>

**І. А. Валявський**, канд. техн. наук, **О. В. Лисенко**, доц., канд. техн. наук,  
**О. І. Скібінський**, доц., канд. техн. наук, **А. Р. Апаракін**, канд. техн. наук

*Центральноукраїнський національний технічний університет, м. Кропивницький, Україна  
e-mail: valiyavskiyia@kntu.kr.ua*

## Кінематичний аналіз впливу реконфігурації гексапода на його робочий простір

Розглянуто проблему обмеженості робочого простору (РП) верстатів-гексаподів та наявності в ньому сингулярних зон. Запропоновано поняття інтегрального робочого простору  $W_{int}$  як об'єднання класичних РП при всіх допустимих конфігураціях шарнірів несучої системи. Наведено математичний апарат кінематики реконфігурованого гексапода, метод чисельного моделювання та результати порівняння  $W_{int}$  зі стандартним РП при різних кутах нахилу шпинделя.

**гексапод, паралельна кінематика, робочий простір, сингулярність, матриця Якобі, інтегральний робочий простір, число обумовленості**

**Постановка проблеми.** Верстати з паралельною кінематикою, зокрема гексаподи на основі платформи Гофа-Стюарта, забезпечують високу жорсткість несучої системи порівняно з традиційними верстатами з послідовною кінематикою, оскільки робоче навантаження розподіляється між шістьма кінематичними ланками (штангами) одночасно [1, 2]. Замкнена кінематична структура дозволяє реалізувати шість ступенів свободи виконавчого органу (ВО) в межах одного механізму та забезпечує потенційно високу точність позиціонування.

Разом із тим гексаподи мають два принципових недоліки, що обмежують їхнє широке промислове застосування: 1) мале співвідношення розмірів робочого простору до загальних габаритів верстата [1, 3]; 2) форма та об'єм робочого простору суттєво змінюються при нахилі шпинделя – в умовах п'ятикоординатної обробки це призводить до значного скорочення зони досяжності та ускладнює визначення оптимального положення заготовки на робочому столі.

Окрему проблему становлять сингулярні конфігурації – особливі положення механізму, в яких верстат частково або повністю втрачає керованість та жорсткість [4]. Особливо небезпечними є структурні сингулярності, за яких система раптово набуває додаткової некерованої рухливості, що унеможливує точне виконання технологічних траєкторій без спеціальних апаратних чи програмних заходів [5].

Існуючі підходи до вирішення цих проблем зосереджуються переважно на оптимізації геометричних параметрів верстата на етапі його проектування [6, 7]. Такий підхід є статичним і не дозволяє адаптувати структуру під конкретну деталь у процесі експлуатації. В роботі [8] авторами було запропоновано концептуальну ідею керованого переміщення опорних шарнірів бази по радіальних напрямних, що дозволяє змінювати конфігурацію несучої системи в реальному часі, і на основі графічного аналізу показано принципову можливість розширення зони досяжності. Проте строгого аналітичного опису об'єднаного простору та кількісної оцінки зон сингулярності у тій праці надано не було.

Метою даної статті є введення формального математичного поняття інтегрального робочого простору гексапода з керованими координатами опорних шарнірів станини, розробка методу його чисельного моделювання та комплексне кількісне порівняння з класичним робочим простором за критеріями ефективної площі перерізів та наявності сингулярних зон.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Фундаментальний огляд наукової літератури, присвяченої кінематиці та класифікації особливих станів платформи Стюарта, представлено в [9]. У роботі [3] показано, що форма робочої зони безпосередньо залежить від просторової орієнтації ВО. Для чисельного оцінювання близькості паралельних механізмів до сингулярності у праці [4] було запропоновано використовувати критерій числа обумовленості матриці Якобі. Розвиваючи цей підхід, Дасгупта та Мрутьюнджая [10] розробили алгоритми чисельного аналізу близькості платформ Стюарта до небезпечних зон на основі спектрального розкладу диференціальних матриць, обґрунтувавши доцільність використання жорстких обмежень на число обумовленості для планування безсингулярних траєкторій руху. Вагомий внесок у дослідження природи особливих положень паралельних структур зробили Златанов, Бонев та Госселін [5], які формалізували концепцію сингулярності зв'язків і довели, що такі дефекти не виявляються стандартними кінематичними рівняннями, вимагаючи залучення повних нормованих матриць Якобі.

Підхід до розширення робочого простору шляхом введення додаткових керованих координат у несучу структуру досліджувався у світовій практиці значно рідше. Зокрема, Лін та Чен [11] розробили математичну модель реконфігурації платформи Гофа-Стюарта з ковзними шарнірами основи, проте їхні дослідження були спрямовані виключно на оптимізацію динамічних і силових характеристик маніпулятора без аналізу геометричної трансформації робочих зон. Іншим перспективним напрямком є локальне перепланування рухів у процесі роботи; так, в [12] запропоновано чисельний метод, у якому виявлені точки сингулярності групуються в ізольовані кластери та інтерпретуються як просторові перешкоди. Проте вказані підходи не вирішують задачу системного моделювання всього об'єднаного простору багатокоординатних верстатів при значних нахилах шпинделя.

В проаналізованих авторами джерелах не виявлено цілісного підходу до формалізації та чисельного розрахунку інтегрального робочого простору верстатів-гексаподів з керованою геометрією станини. Існуючі математичні моделі описують переважно статичні паралельні механізми, що унеможлиблює безпосереднє оцінювання потенційного розширення зони досяжності та трансформації сингулярних областей за умов багатоваріантної реконфігурації опорних шарнірів.

Окремо слід зазначити, що на відміну від базової роботи авторів [8], де на рівні концептуальної ідеї було наведено лише загальний графічний аналіз геометричної зони досяжності, у даній статті сформульовано математичний апарат оцінювання кінематичної стабільності реконфігурованого гексапода. Удосконалення полягає у введенні критерію числа обумовленості нормованої матриці Якобі, приведеної до вершини інструмента, що дозволило виконати точний кількісний аналіз реального виключення сингулярних зон з ефективного робочого простору верстата.

Усунення окреслених науково-технічних прогалин і є предметом даного дослідження.

**Постановка завдання.** Розглядається верстат-гексапод, в якому кожен із шести опорних шарнірів бази  $A_i$  може переміщатися по індивідуальній радіальній напрямній на відстань від 0 до  $q_{\max}$  від вихідного положення. Вектор  $q = [q_1, \dots, q_6]^T$  є вектором керованих геометричних параметрів несучої системи.

Завдання дослідження:

- 1) ввести математичне визначення інтегрального робочого простору  $W_{int}$ ;
- 2) розробити метод чисельного моделювання  $W_{int}$  на основі радіального сканування і аналізу числа обумовленості матриці Якобі;
- 3) кількісно порівняти  $W_{int}$  зі стандартним РП  $W(q)$  за ефективною площею перерізів і площею зон сингулярності при різних кутах нахилу шпинделя.

**Виклад основного матеріалу.** Традиційні верстати-гексаподи з паралельною кінематикою мають жорстко зафіксовані геометричні параметри несучої системи (радіуси розташування шарнірів основи та виконавчого органу). За таких умов їхній класичний ефективний робочий простір (РП) є статичним об'єктом, форма та об'єм якого істотно обмежуються ходом кінематичних ланок, кутами нахилу шарнірів, а також наявністю внутрішніх сингулярних зон, особливо в режимах п'ятикоординатної обробки з великими кутами нахилу шпинделя.

Для подолання цих обмежень у даній роботі розвинуто концепцію реконфігурованої несучої системи гексапода, в якій шість опорних шарнірів бази мають можливість додаткового керованого переміщення вздовж індивідуальних радіальних напрямних, що дозволяє адаптувати структуру верстата під поточне технологічне завдання.

Нехай  $q = [q_1, q_2, \dots, q_6]^T$  – вектор керованих геометричних параметрів несучої системи, де  $q_i \in [0, q_{max}]$  визначає величину радіального зміщення  $i$ -го шарніра бази від його вихідного положення. Тоді класичний ефективний робочий простір механізму при фіксованій геометрії несучої системи можна описати як множину точок:

$$W(q) = \{\bar{r}_M \in \mathbb{R}^3 \mid l_{min} \leq l_i(\bar{r}_M, q) \leq l_{max}, \kappa(J_x(\bar{r}_M, q)) \leq \kappa_{max}, i = 1 \dots 6\},$$

де  $\bar{r}_M$  – радіус-вектор заданої точки інструмента;  $l_{min}, l_{max}$  – граничні обмеження на довжини штанг;  $\kappa$  – число обумовленості нормованої матриці Якобі;  $\kappa_{max}$  – гранично припустиме значення обумовленості конструкції.

Формалізуємо поняття інтегрального робочого простору  $W_{int}$  як теоретико-множинне об'єднання всіх класичних ефективних робочих просторів, що можуть бути згенеровані за умови повного перебору всіх припустимих конфігурацій розташування шарнірів  $q$  у межах їхньої області визначення  $Q$ :

$$W_{int} = \bigcup_{q \in Q} W(q), \quad (1)$$

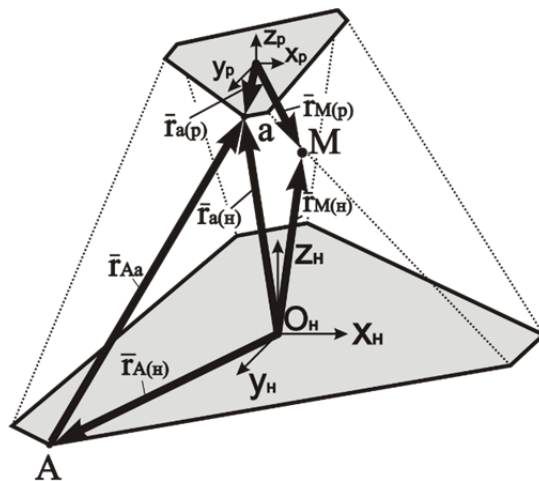
де  $Q$  – множина всіх векторів  $q$ .

З наведеного визначення безпосередньо випливає конструктивне співвідношення  $W_{int} \supseteq W(q)$  для будь-якої фіксованої конфігурації  $q \in Q$ . Це означає, що інтегральний простір потенційно дозволяє розширити межі досяжності та нівелювати локальні зони втрати жорсткості за рахунок оперативної зміни положення опорних точок станини у процесі функціонування верстата.

Для практичної реалізації та чисельного аналізу розглянутої концепції необхідно встановити функціональні зв'язки між просторовим положенням виконавчого органу (ВО) верстата та довжинами його кінематичних ланок з урахуванням поточного стану реконфігурації шарнірів. Розв'язання зворотної задачі кінематики (ЗЗК) базується на розрахунковій схемі гексапода, наведеній на рисунку 1.

Введемо нерухому систему координат несучої системи  $O_H X_H Y_H Z_H$  та рухому систему координат ВО  $O_P X_P Y_P Z_P$ , пов'язану з рухомою платформою. Положення вершини інструмента (заданої точки  $M$ ) у нерухомій системі координат описується

радіус-вектором  $\bar{r}_{M(n)}$ . Орієнтація шпиндельного вузла задається матрицею поворотів  $M_{rot}$ , яка формується через кути нахилу шпинделя  $\alpha$  та  $\beta$ .



$O_n X_n Y_n Z_n$  – нерухома система координат несучої системи;  $O_p X_p Y_p Z_p$  – рухома система координат ВО;  
 $A$  – шарнір несучої системи;  $a$  – шарнір ВО;  $M$  – задана точка інструмента

Рисунок 1 – Розрахункова схема гексапода

Джерело: [1]

Згідно із замкненим векторним контуром (рис. 1), вектор  $i$ -ї штанги  $\bar{r}_{Aa}$  спрямований від шарніра бази  $A_i$  до відповідного шарніра платформи  $a_i$ . З урахуванням радіального зміщення опорних точок  $q$ , довжина та просторова орієнтація ланки визначаються так:

$$\bar{r}_{Aa} = \bar{r}_{a(n)} - \bar{r}_{A(n)}(q) = \bar{r}_{M(n)} + M_{rot} \cdot (\bar{r}_{a(p)} - \bar{r}_{M(p)}) - \bar{r}_{A(n)}(q), \quad (2)$$

де  $\bar{r}_{Ma(p)} = \bar{r}_{a(p)} - \bar{r}_{M(p)}$  – радіус-вектор, що визначає положення шарніра платформи  $a$  відносно заданої точки інструмента  $M$  у власній рухомій системі координат. Тоді поточна довжина  $i$ -ї штанги розраховується як довжина вектора:

$$l_i = \|\bar{r}_{Aa}\| = \sqrt{(X_{ai} - X_{Ai}(q_i))^2 + (Y_{ai} - Y_{Ai}(q_i))^2 + (Z_{ai} - Z_{Ai})^2} \quad (3)$$

Аналіз кінематичної стабільності та жорсткості несучої системи гексапода у кожній точці простору виконується за допомогою диференціальних співвідношень. Матриця Якобі  $J_x$  встановлює лінійний зв'язок між вектором узагальнених швидкостей виконавчого органу та швидкостями зміни довжин кінематичних ланок верстата.

Рядок  $i$  загальної матриці Якобі, що відповідає  $i$ -й штанзі механізму, формується з лінійної та кутової частин. Лінійна частина визначається одиничним вектором напрямку штанги:

$$\bar{n}_i = \frac{\bar{r}_{Aa}}{l_i} \quad (4)$$

Кутова частина матриці Якобі описує вплив обертальних рухів. Для коректного врахування конструктивного вильоту інструмента кутову частину зведено безпосередньо до точки приведення – вершини інструмента  $M$ . Вона обчислюється як

векторний добуток радіус-вектора шарніра платформи відносно точки  $M$  на одиничний вектор напрямку ланки:

$$\bar{\tau}_i = \bar{r}_{Ma(p)} \times \bar{n}_i = (\bar{r}_{a(p)} - \bar{r}_{M(p)}) \times \bar{n}_i \quad (5)$$

Для усунення розмірної несумісності між лінійними (безрозмірними) та кутовими (що мають розмірність довжини) компонентами елементів матриці застосовано характеристичну довжину нормування  $l_c = \sqrt{R_p \cdot R_n}$ , де  $R_p$  та  $R_n$  – радіуси рухомої платформи та нерухомої бази відповідно.

З урахуванням проведеного нормування, остаточний вигляд  $i$ -го рядка матриці Якобі для досліджуваного реконфігурованого гексапода набуває вигляду:

$$J_i = \left[ \bar{n}_i^T, \left( \frac{(\bar{r}_{a(p)} - \bar{r}_{M(p)}) \times \bar{n}_i}{l_c} \right)^T \right] \quad (6)$$

Повна нормована матриця Якобі  $J_x$  розмірністю  $6 \times 6$  формується шляхом послідовного об'єднання таких рядків для всіх шести штанг механізму ( $i = 1 \dots 6$ ).

Оцінка близькості механізму до сингулярного стану (зони втрати керованості або заклинювання) здійснюється через число обумовленості матриці Якобі  $\kappa(J_x)$ , яке обчислюється на основі її сингулярного розкладу (SVD):

$$\kappa(J_x) = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}}, \quad (7)$$

де  $\sigma_{max}, \sigma_{min}$  – відповідно максимальне та мінімальне сингулярні числа матриці Якобі у досліджуваній точці. Значення  $\kappa = 1$  відповідає ідеальній конфігурації механізму, тоді як стрімке зростання  $\kappa$  свідчить про наближення до сингулярності.

Для геометричної побудови та кількісного аналізу перерізів просторів  $W(q)$  та  $W_{int}$  розроблено алгоритм полярного радіального сканування у горизонтальних площинах ( $z = const$ ).

Для кожного фіксованого рівня висоти  $z$  простір сканується за кутовою координатою  $\varphi$  (від  $0^\circ$  до  $360^\circ$  із кроком  $\Delta\varphi$ ) та радіусом  $\rho$  від центральної осі верстата до межі досяжності конструкції з дискретним шагом  $\Delta\rho$ . Для точного виявлення ізольованих незв'язних ділянок («острівців») ефективного чи сингулярного простору на периферії промінь сканування проходиться повністю до максимального радіуса без зупинки при першому порушенні умов досяжності. При чисельному моделюванні прийнято припущення, що кутові діапазони повороту шарнірів платформи та бази є достатніми для реалізації будь-якої просторової орієнтації штанг, тобто обмеження на кути повороту в карданних чи сферичних шарнірах під час розрахунку не враховувалися.

Обчислення ефективної площі перерізу  $S_{ef}(z)$  та площі зон сингулярності  $S_{син}(z)$  виконується шляхом чисельного інтегрування методом подвійних полярних сум по всіх дискретних точках  $(\rho_k, \varphi_m)$ , які задовольнили відповідні критерії працездатності:

$$S_{ef}(z) \approx \sum_{m=1}^{N_\varphi} \sum_{k=1}^{N_\rho} \chi_{ef}(\rho_k, \varphi_m; z) \rho_k \Delta\rho \Delta\varphi \quad (8)$$

Тут  $N_\varphi$  і  $N_\rho$  – кількість дискретних значень кутової та радіальної координат відповідно,  $\Delta\varphi$  і  $\Delta\rho$  – кроки дискретизації за кутом і радіусом,  $\rho_k$  та  $\varphi_m$  – дискретні

значення полярних координат, а  $\chi_{\text{ef}}(\rho_k, \varphi_m; z)$  – індикаторна функція, що набуває значення 1 у разі належності точки  $(\rho_k, \varphi_m)$  на висоті  $z$  до ефективної зони робочого простору та 0 в іншому випадку. Таким чином, площа ефективного перерізу визначається як сума елементарних полярних площ, що відповідають усім точкам дискретизованої області, які задовольняють критерій працездатності.

Для побудови інтегрального робочого простору  $W_{\text{int}}$  чисельний перебір конфігурацій оптимізовано шляхом аналізу  $2^6 = 64$  дискретних двійкових станів несучої системи, де кожен із шести регульованих шарнірів бази приймає екстремальні положення: або вихідне ( $q_i = 0$ ), або максимально розсунуте ( $q_i = q_{\text{max}}$ ). Перебір 64 крайніх конфігурацій не претендує на строгий пошук глобального математичного максимуму інтегрального простору, а застосовується як раціональний інструмент для швидкої та наочної оцінки його зовнішніх меж. Вибір граничних точок діапазону обґрунтовано тим, що найбільша трансформація кутів нахилу кінематичних ланок та найсуттєвіше покращення обумовленості матриці Якобі досягаються саме на межах припустимих переміщень регульованих шарнірів станини.

Чисельний експеримент проведено для верстата-гексапода з такими вихідними конструктивними та геометричними параметрами (рис. 2): радіус розташування шарнірів нерухомої бази у вихідному стані:  $R_{\text{н}} = 300$  мм; радіус розташування шарнірів рухомої платформи ВО:  $R_{\text{р}} = 100$  мм; кути розміщення шарнірів  $\omega_{\text{р}} = \omega_{\text{н}} = 10^\circ$ ; діапазон зміни робочих довжин штанг:  $l = 500 \dots 800$  мм (співвідношення  $l_{\text{max}}/l_{\text{min}} = 1,6$ ); конструктивний виліт інструмента відносно платформи:  $Z_{\text{м}} = 150$  мм; максимальний хід радіальної реконфігурації шарнірів бази:  $q_{\text{max}} = 100$  мм; граничний коефіцієнт обумовленості:  $\kappa_{\text{max}} = 6$ , що забезпечує достатньо чутливе розрізнення працездатних і проблемних конфігурацій механізму; діапазон дослідження за висотою:  $z = 200 \dots 800$  мм.

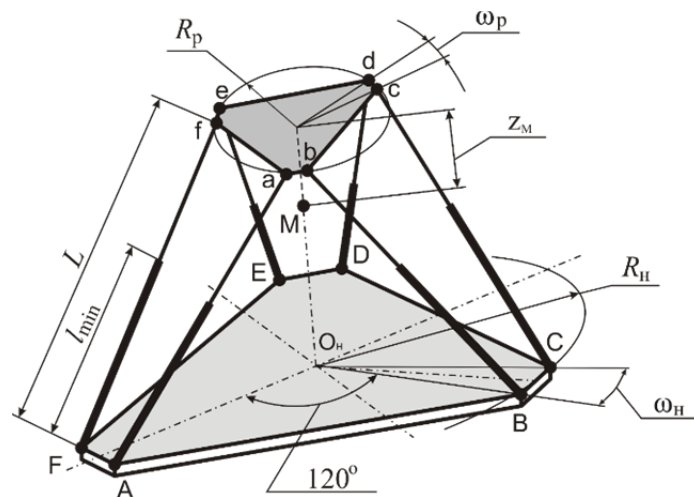


Рисунок 2 – Конструктивні параметри ВО та несучої системи

Джерело: [1]

Програмна реалізація розробленого алгоритму чисельного моделювання, обчислення елементів нормованої матриці Якобі, її SVD-розкладу для визначення числа обумовленості  $\kappa$ , а також візуалізація отриманих робочих зон виконані авторами за допомогою спеціально розробленого розрахункового скрипту на мові програмування Python (із використанням спеціалізованих бібліотек матричного аналізу NumPy та графічного виведення Matplotlib).

На рис. 3-6 наведено порівняльні перерізи класичного  $W(q)$  та інтегрального  $W_{\text{int}}$  РП при вертикальному положенні шпинделя ( $\alpha = 0^\circ$ ,  $\beta = 0^\circ$ ). Крапками позначено ефективну зону ( $\kappa \leq 6$ ), хрестиками – зону сингулярності ( $\kappa > 6$ ). Масштаб обох перерізів у кожній парі однаковий.

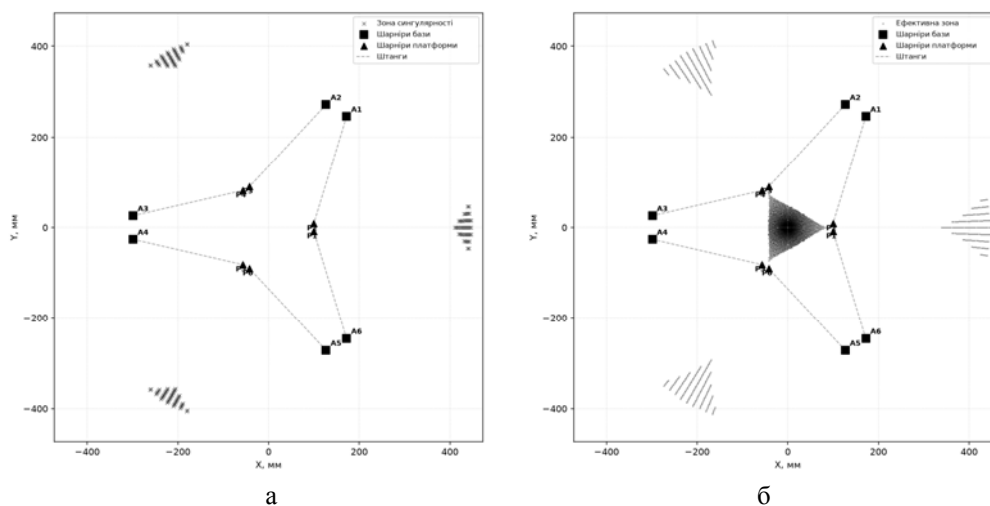


Рисунок 3 – Переріз робочого простору при  $z = 250$  мм ( $\alpha = 0^\circ$ ): класичний (а) і інтегральний (б)  
Джерело: розроблено авторами

При  $z = 250$  мм класичний РП є повністю непрацездатним: вся досяжна зона сингулярна ( $S_{\text{син}} = 64,1$  см<sup>2</sup>,  $S_{\text{еф}} = 0$ ). Ізольовані ділянки сингулярної зони розташовані осторонь від центра, що є характерним для даної компоновки. В інтегральному РП реконфігурація шарнірів дозволяє повністю виключити ці сингулярні області з ефективного робочого простору і «відкриває» функціональну зону  $S_{\text{еф}} = 314,8$  см<sup>2</sup>. Це демонструє принциповий ефект концепції: верстат, що є непрацездатним у стандартній конфігурації на даній висоті, стає повністю функціональним після реконфігурації.

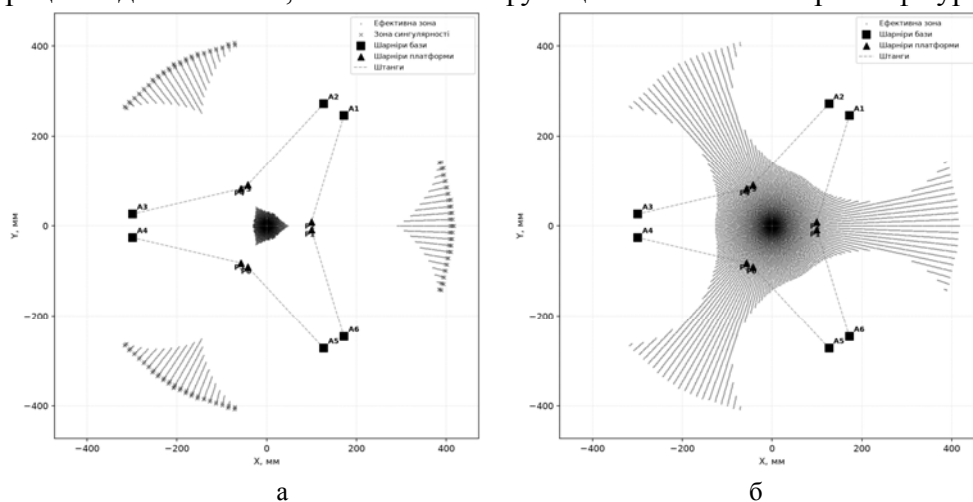


Рисунок 4 – Переріз робочого простору при  $z = 300$  мм ( $\alpha = 0^\circ$ ): класичний (а) і інтегральний (б)  
Джерело: розроблено авторами

При  $z = 300$  мм в класичному РП є невеликий ефективний центральний острівцець (446,3 см<sup>2</sup>) і значні сингулярні зони (72,3 см<sup>2</sup>), розкидані осторонь від нього. В інтегральному РП ефективна площа зростає до 1860,7 см<sup>2</sup> – у 4,2 рази – за рахунок того,

що розсування шарнірів бази змінює кути нахилу штанг і різко покращує обумовленість матриці Якобі.

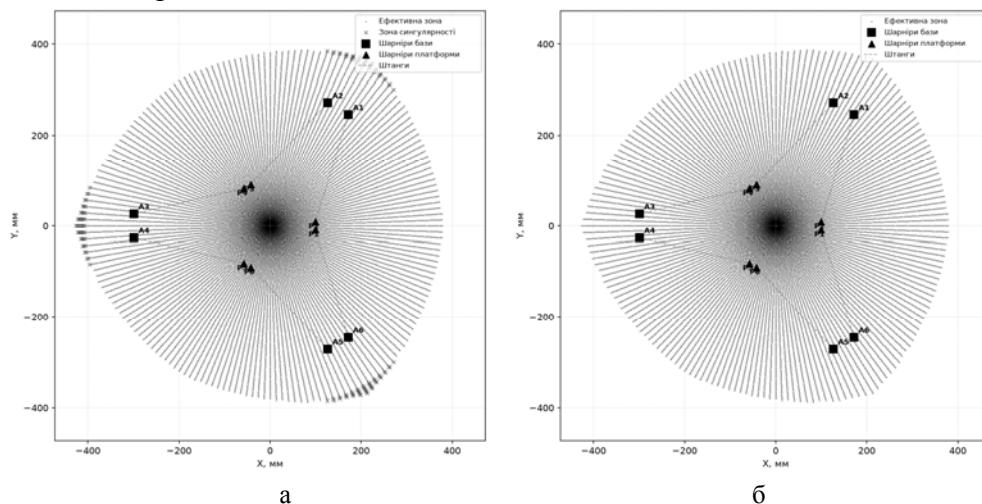


Рисунок 5 – Переріз робочого простору при  $z = 350$  мм ( $\alpha = 0^\circ$ ): класичний (а) і інтегральний (б)  
Джерело: розроблено авторами

При  $z = 350$  мм класичний РП вже займає велику площу і має майже круглу форму. Сингулярна зона ( $55,7$  см<sup>2</sup>) локалізована на периферії. В інтегральному РП вплив цієї зони повністю нівелюється за рахунок зміни геометрії станини. Починаючи з  $z = 400$  мм класичний і інтегральний РП збігаються – реконфігурація не дає додаткового ефекту в середині діапазону висот.

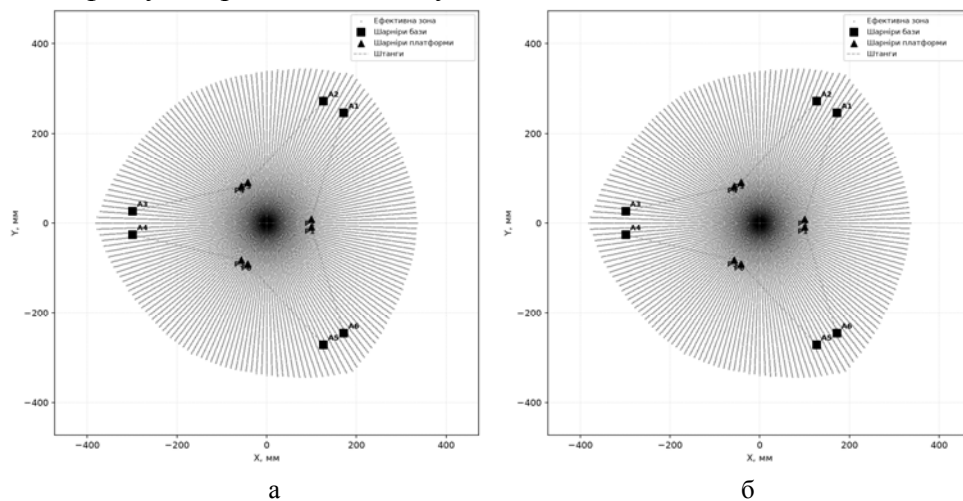


Рисунок 6 – Переріз робочого простору при  $z = 400$  мм ( $\alpha = 0^\circ$ ): класичний (а) і інтегральний (б)  
Джерело: розроблено авторами

Нахил шпинделя на  $\alpha = 25^\circ$  суттєво змінює форму і розподіл РП: зони сингулярності стають значно більшими і охоплюють не лише периферію, але й значну частину перерізу. Рис. 7-8 ілюструють найбільш характерні висоти.

При  $\alpha = 25^\circ$ ,  $z = 350$  мм класичний РП має асиметричну форму – нахил шпинделя породжує великі сингулярні зони. Інтегральний РП заповнює частину цих зон ефективними точками, збільшуючи ефективну площу більш ніж удвічі. Проте повністю усунути сингулярності не вдається: вони перерозподіляються по периферії. Крім того, у класичному РП виникає характерна «діра» – повністю недосяжна зона всередині перерізу. В інтегральному РП ця зона зменшується майже вдвічі.

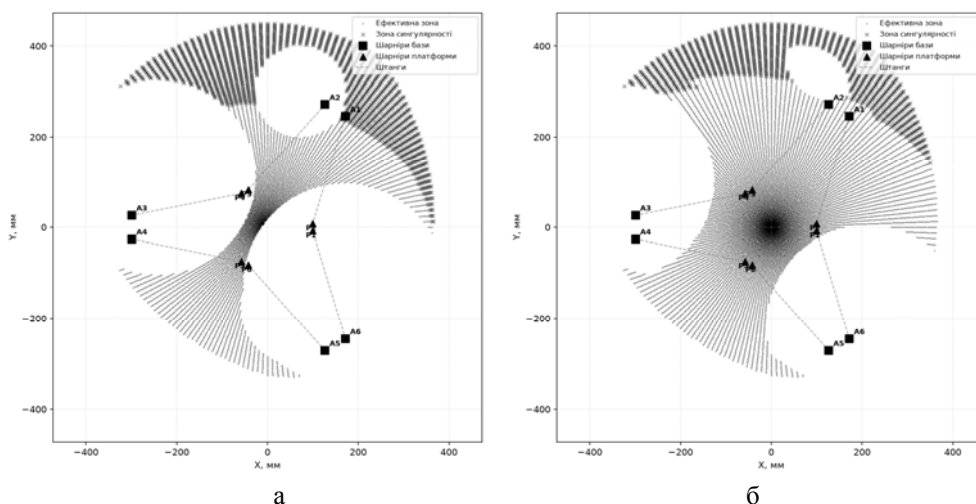


Рисунок 7 – Переріз робочого простору при  $z = 350$  мм ( $\alpha = 25^\circ$ ): класичний (а) і інтегральний (б)  
Джерело: розроблено авторами

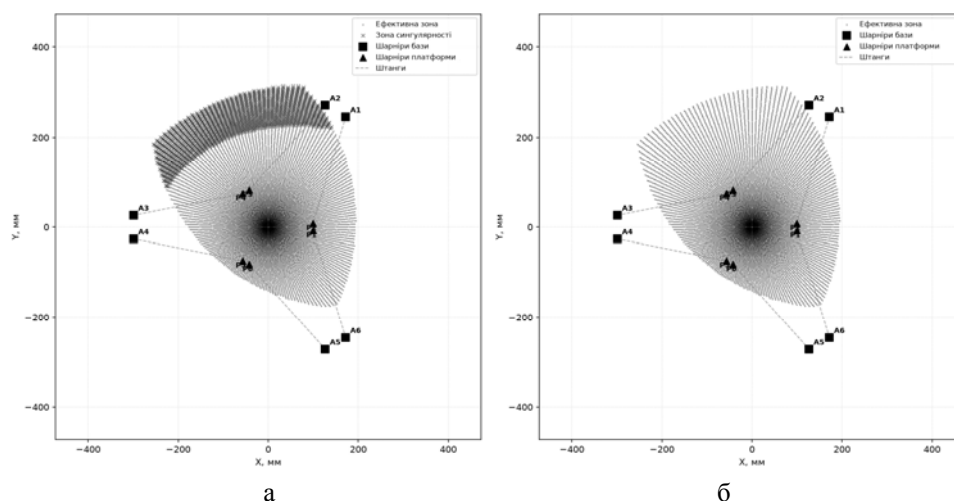


Рисунок 8 – Переріз робочого простору при  $z = 500$  мм ( $\alpha = 25^\circ$ ): класичний (а) і інтегральний (б)  
Джерело: розроблено авторами

При  $z = 500$  мм реконфігурація забезпечує повне виведення сингулярних конфігурацій поза межі поточної області досяжності. Різниця між класичним і інтегральним перерізами добре видна: ліворуч сингулярна зона формує великий сектор у лівій частині РП, праворуч цього сектора немає.

При нахилі  $\alpha = 35^\circ$  ситуація різко ускладнюється: сингулярна зона в класичному РП стає порівнянною або перевищує ефективну. На рис. 9-11 наведено найбільш показові перерізи.

При  $\alpha = 35^\circ$ ,  $z = 400$  мм сингулярна зона перевищує ефективну в класичному РП. Це означає, що в стандартній конфігурації більша частина теоретично досяжного простору є технологічно непридатною. Реконфігурація майже подвоює ефективну площу (+75%), але повністю усунути сингулярності не може – вони залишаються у верхньому секторі.

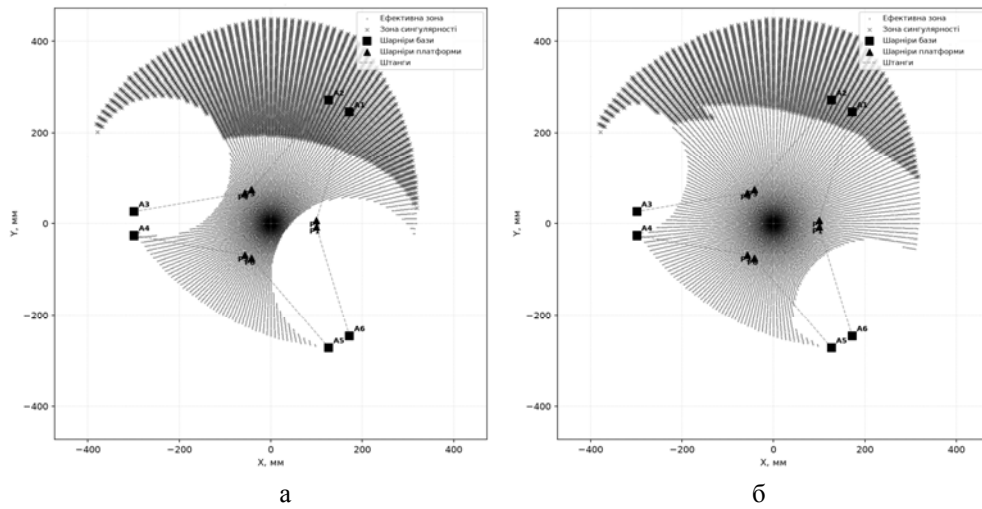


Рисунок 9 – Переріз робочого простору при  $z = 400$  мм ( $\alpha = 35^\circ$ ): класичний (а) і інтегральний (б)  
Джерело: розроблено авторами

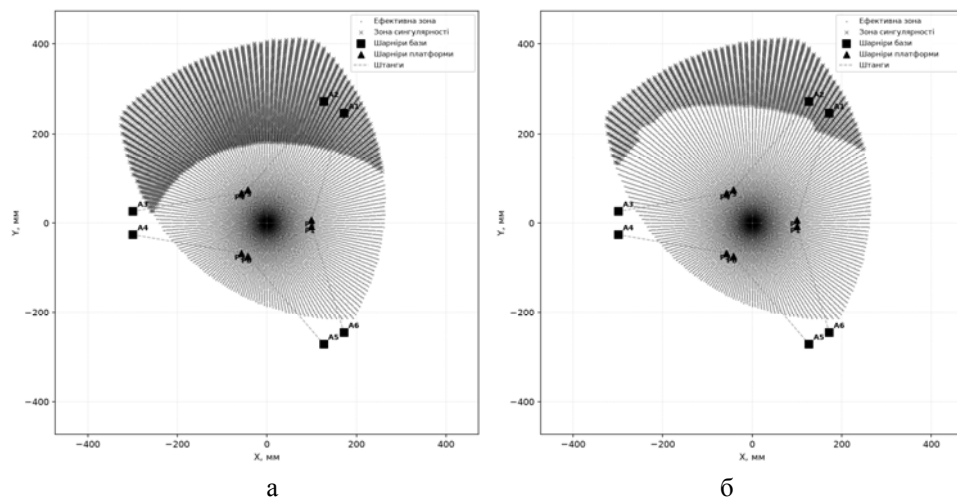


Рисунок 10 – Переріз РП при  $z = 450$  мм ( $\alpha = 35^\circ$ ): класичний (а) і інтегральний (б)  
Джерело: розроблено авторами

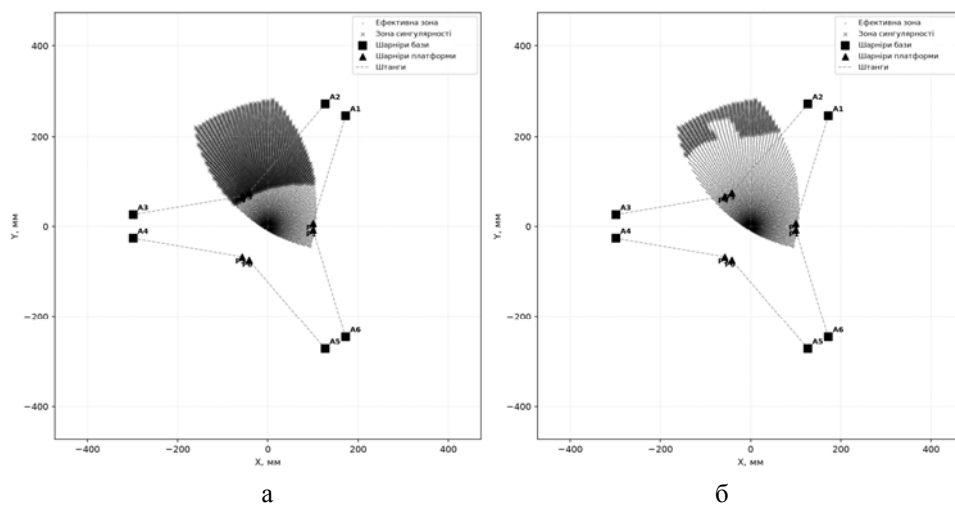


Рисунок 11 – Переріз РП при  $z = 550$  мм ( $\alpha = 35^\circ$ ): класичний (а) і інтегральний (б)  
Джерело: розроблено авторами

При  $z = 550$  мм і  $\alpha = 35^\circ$  в класичному РП співвідношення зон стає критичним:  $S_{\text{син}}/S_{\text{еф}} \approx 2,4$ . Реконфігурація різко покращує ситуацію: ефективна площа зростає у 2,7 рази, сингулярна знижується на 70%. Навіть при цьому кращому результаті сингулярні зони зберігаються, що вказує на необхідність алгоритму точного виходу з них.

Графіки зміни площ зон РП від висоти  $z$  для всіх трьох кутів нахилу наведені на Рис. 12–14. На кожному графіку ліворуч – класичний РП, праворуч – інтегральний.

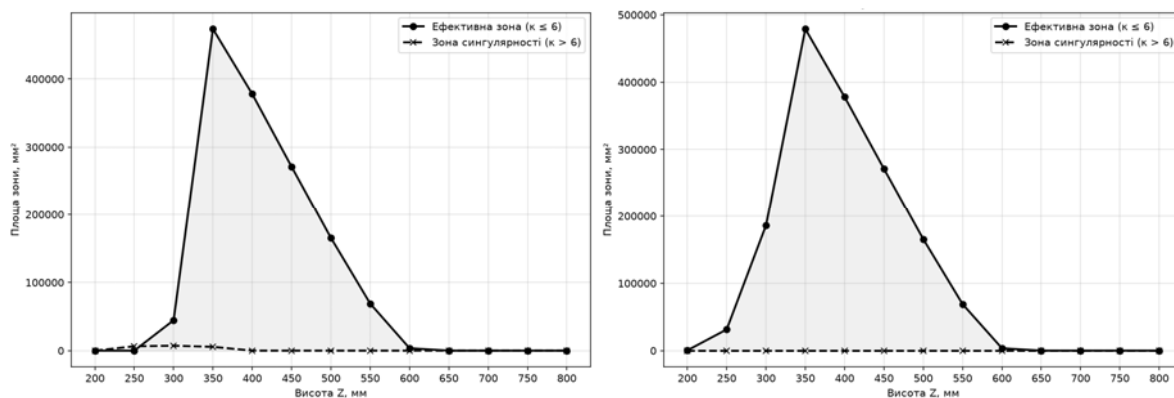


Рисунок 12 – Зміна площ зон РП від висоти  $z$  ( $\alpha = 0^\circ$ )

Джерело: розроблено авторами

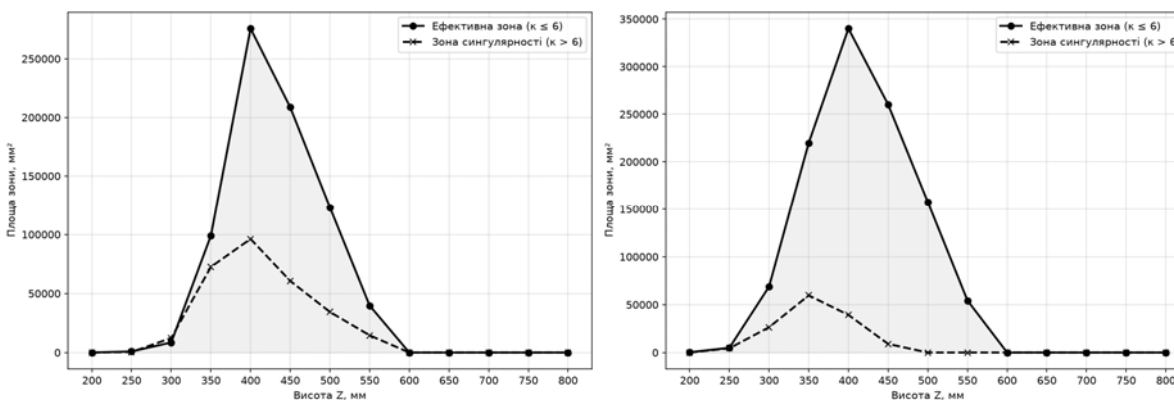


Рисунок 13 – Зміна площ зон РП від висоти  $z$  ( $\alpha = 25^\circ$ )

Джерело: розроблено авторами

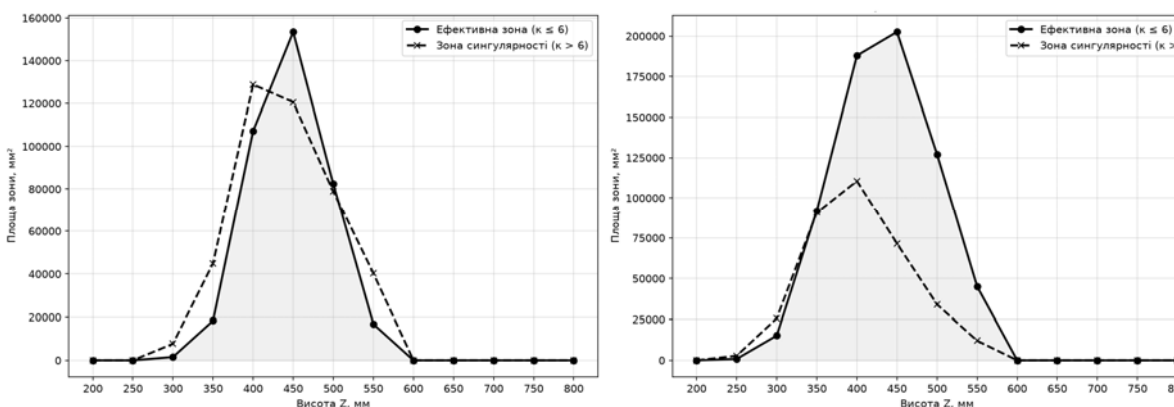


Рисунок 14 – Зміна площ зон РП від висоти  $z$  ( $\alpha = 35^\circ$ )

Джерело: розроблено авторами

Повні числові результати моделювання для всіх трьох кутів нахилу зведено в табл. 1.

Таблиця 1 – Порівняння класичного і інтегрального РП при різних кутах нахилу шпинделя ( $\kappa_{\max} = 6$ ,  $q_{\max} = 100$  мм)

| z, мм                          | Площа ефективного РП,<br>см <sup>2</sup> |                      | Δ <sub>еф</sub> , % | Площа сингулярної зони,<br>см <sup>2</sup> |                       | Δ <sub>син</sub> , % |
|--------------------------------|------------------------------------------|----------------------|---------------------|--------------------------------------------|-----------------------|----------------------|
|                                | S <sub>еф кл.</sub>                      | S <sub>еф інт.</sub> |                     | S <sub>син кл.</sub>                       | S <sub>син інт.</sub> |                      |
| α = 0° (вертикальний шпиндель) |                                          |                      |                     |                                            |                       |                      |
| 200                            | 0                                        | 4,2                  | —                   | 0                                          | 0                     | —                    |
| 250                            | 0                                        | 314,8                | —                   | 64,1                                       | 0                     | -100                 |
| 300                            | 446,3                                    | 1860,7               | +317                | 72,3                                       | 0                     | -100                 |
| 350                            | 4734,8                                   | 4790,5               | +1,2                | 55,7                                       | 0                     | -100                 |
| 400                            | 3779,5                                   | 3779,5               | 0                   | 0                                          | 0                     | —                    |
| 450                            | 2713,2                                   | 2713,2               | 0                   | 0                                          | 0                     | —                    |
| 500                            | 1655,8                                   | 1655,8               | 0                   | 0                                          | 0                     | —                    |
| 550                            | 690,0                                    | 690,0                | 0                   | 0                                          | 0                     | —                    |
| 600                            | 35,7                                     | 35,7                 | 0                   | 0                                          | 0                     | —                    |
| Разом                          | 14055,3                                  | 15849,7              | +12,7%              | 192,1                                      | 0                     | -100%                |
| α = 25° (нахил шпинделя 25°)   |                                          |                      |                     |                                            |                       |                      |
| 200                            | 0                                        | 3,3                  | —                   | 0                                          | 0                     | —                    |
| 250                            | 9,2                                      | 49,5                 | +435                | 4,2                                        | 44,5                  | * +962               |
| 300                            | 85,2                                     | 688,2                | +707                | 122,9                                      | 264,1                 | * +115               |
| 350                            | 990,2                                    | 2198,3               | +122                | 725,0                                      | 596,5                 | -17,7                |
| 400                            | 2758,3                                   | 3401,0               | +23,3               | 961,6                                      | 392,7                 | -59,2                |
| 450                            | 2086,4                                   | 2602,2               | +24,7               | 605,9                                      | 90,0                  | -85,1                |
| 500                            | 1230,9                                   | 1574,5               | +27,9               | 343,6                                      | 0                     | -100                 |
| 550                            | 397,8                                    | 543,6                | +36,6               | 145,8                                      | 0                     | -100                 |
| Разом                          | 7558,0                                   | 11060,6              | +46,3%              | 2908,0                                     | 1387,8                | -52,3%               |
| α = 35° (нахил шпинделя 35°)   |                                          |                      |                     |                                            |                       |                      |
| 200                            | 0                                        | 0                    | —                   | 0                                          | 0                     | —                    |
| 250                            | 0                                        | 8,5                  | —                   | 0                                          | 27,9                  | * нові               |
| 300                            | 15,3                                     | 151,4                | +887                | 76,8                                       | 256,9                 | * +234               |
| 350                            | 183,5                                    | 919,9                | +401                | 449,9                                      | 908,2                 | * +102               |
| 400                            | 1072,0                                   | 1879,6               | +75,3               | 1288,3                                     | 1105,3                | -14,2                |
| 450                            | 1535,1                                   | 2026,2               | +32,0               | 1206,1                                     | 715,0                 | -40,7                |
| 500                            | 823,5                                    | 1270,3               | +54,2               | 787,7                                      | 341,0                 | -56,7                |
| 550                            | 167,9                                    | 451,2                | +169                | 403,1                                      | 119,9                 | -70,3                |
| Разом                          | 3797,3                                   | 6707,1               | +76,6%              | 4211,9                                     | 3474,2                | -17,5%               |

Примітки: «—» — обидва значення нульові. «\*» —  $W_{\text{інт}}$  містить більше сингулярних точок, ніж  $W(q)$ . «Разом» — сума площ по всіх перерізах, см<sup>2</sup>

Джерело: розроблено авторами

З табл. 1 простежуються наступні закономірності:

1) Загальний приріст ефективного РП зростає зі збільшенням кута нахилу шпинделя: +12,7% при  $\alpha = 0^\circ$ , +46,3% при  $\alpha = 25^\circ$  і +76,6% при  $\alpha = 35^\circ$ . Це пояснюється тим, що нахил шпинделя суттєво зменшує класичний РП (зі 14055 до 3797  $\text{cm}^2$  сумарної ефективної площі), тоді як інтегральний РП зберігає більшу частину цієї втраченої площі.

2) Ефективність усунення сингулярних зон знижується зі збільшенням нахилу: повне усунення (–100%) при  $\alpha = 0^\circ$ , –52% при  $\alpha = 25^\circ$  і лише –18% при  $\alpha = 35^\circ$ . При великих кутах нахилу розташування сингулярних зон визначається переважно геометрією нахилених штанг, яку реконфігурація бази не може повністю компенсувати.

3) При  $\alpha = 25^\circ$  і особливо при  $\alpha = 35^\circ$  в нижній частині РП ( $z \leq 350$  мм) спостерігається ефект «нових сингулярних точок» (позначено «\*»):  $W_{\text{int}}$  містить більше сингулярних точок, ніж  $W(q_0)$ . Це відбувається тому, що реконфігурація відкриває нові зони досяжності, частина яких є сингулярною. Загальний інтегральний РП  $W_{\text{int}}$  залишається більшим, але «якість» (частка ефективної площі) у нижній частині може бути нижчою.

Отримані у цій роботі результати моделювання площ перерізів та аналізу кінематичної обумовленості відповідають потенційним (максимально можливим) параметрам інтегрального робочого простору верстата. Оцінку проведено суто за геометричними критеріями довжин ланок та властивостями матриці Якобі. У межах даної статті не враховувалися конструктивні обмеження на кути повороту з'єднувальних шарнірів платформи та бази, динамічні характеристики приводів, а також ймовірність взаємних колізій (зіткнень) кінематичних штанг між собою. Врахування зазначених експлуатаційних факторів та розроблення алгоритму оперативного вибору оптимальної конфігурації шарнірів у реальному часі є пріоритетними напрямками подальших досліджень авторів.

### Висновки:

1. Запропоновано формалізоване представлення інтегрального робочого простору  $W_{\text{int}}$  реконфігурованого гексапода, що описує об'єднання областей ефективної та стабільної обробки для всього діапазону допустимих просторових конфігурацій шарнірів бази. Безпосередньо з визначення впливає співвідношення  $W_{\text{int}} \supseteq W(q)$ , що створює теоретичне підґрунтя для прогнозування та оптимізації кінематичних можливостей механізмів із паралельною кінематикою в умовах п'ятикоординатної обробки.

2. Розроблено метод чисельного моделювання  $W_{\text{int}}$  на основі повного полярного радіального сканування горизонтальних перерізів, що виявляє ізольовані «острівці» РП поза основним тілом. Площа розраховується через інтеграл у полярних координатах (формула 8). Нормалізована матриця Якобі (формули 4-6) з характеристичною довжиною  $l_c$  забезпечує коректне обчислення  $\kappa$  для різних конфігурацій.

3. Чисельне моделювання для гексапода з  $R_n = 300$  мм,  $R_p = 100$  мм,  $l = 500 \dots 800$  мм,  $q_{\text{max}} = 100$  мм підтвердило ефективність підходу. При  $\alpha = 0^\circ$  інтегральний РП перевищує класичний на 12,7%, всі потенційні зони сингулярності ( $\kappa > 6$ ) повністю виключаються з меж ефективної робочої області. Найбільший ефект при  $z = 300$  мм: ефективна площа зростає від 446 до 1861  $\text{cm}^2$  (+317%). Це обумовлено тим, що поблизу нижньої межі діапазону штанги займають близьке до горизонтального положення і навіть незначне розсування шарнірів різко покращує обумовленість матриці Якобі. Зі зростанням висоти ефект згасає через домінуючий вплив обмеження на максимальну довжину штанг. Таким чином, реконфігурація не гарантує автоматичного покращення локальної кінематичної якості кожної окремої точки простору, а лише розширює

множину доступних конфігурацій, серед яких можуть з'являтися нові сингулярні області.

4. Ефект реконфігурації суттєво зростає зі збільшенням кута нахилу шпинделя: при  $\alpha = 25^\circ$  приріст ефективного РП складає 46,3%, при  $\alpha = 35^\circ$  – 76,6%. Це підтверджує особливу цінність підходу для умов п'ятикоординатної обробки, де нахил шпинделя є домінуючим режимом.

5. Встановлено, що при  $\alpha = 35^\circ$  повна мінімізація або виведення сингулярних зон шляхом реконфігурації шарнірів бази є неможливою (зниження лише  $-17,5\%$ ). У нижній частині РП при великих кутах нахилу  $W_{\text{int}}$  може містити більше сингулярних точок, ніж класичний РП, оскільки реконфігурація «відкриває» нові зони досяжності, частина яких є сингулярною.

## Список літератури

1. Валявський, І.А., Лисенко О.В., & Лисенко І.А.. Технологічне обладнання з паралельною кінематикою: навч. посібник: 2-ге вид., перероб. і доп. Кропивницький : ЦНТУ, 2023. 281 с. <https://dspace.kntu.kr.ua/handle/123456789/13500> (дата звернення: 22.06.2026).
2. Stewart, D.. A platform with six degrees of freedom. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, 1965. 180(1), 371-386. [https://doi.org/10.1243/PIME\\_PROC\\_1965\\_180\\_029\\_02](https://doi.org/10.1243/PIME_PROC_1965_180_029_02)
3. Merlet, J.-P. *Parallel Robots* (2nd ed.). Springer. INRIA, Sophia-Antipolis, 2006. <https://doi.org/10.1007/1-4020-4133-0>
4. Gosselin, C., & Angeles, J. Singularity analysis of closed-loop kinematic chains. *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 1990. 6(3), 281-290. <https://doi.org/10.1109/70.56660>
5. Zlatanov, D., Bonev, I. A., & Gosselin, C. M.. Constraint singularities of parallel mechanisms. *Proceedings of ICRA*. 2002, 496-502. <https://doi.org/10.1109/ROBOT.2002.1013408>
6. Merlet, J.-P. Designing a parallel manipulator for a specific workspace. *The International Journal of Robotics Research*. 1994. 16(4), 545-556. <https://doi.org/10.1177/027836499701600407>
7. Huang, Z., Li, Q., & Ding, H. *Theory of Parallel Mechanisms*. Springer, 2013. <https://doi.org/10.1007/978-94-007-4201-7>
8. Павленко І. І., Валявський І. А., Гнатюк А. О. Інтегральний робочий простір верстатів-гексаподів. *Техніка в сільськогосподарському виробництві, галузеве машинобудування, автоматизація*. 2010. 23, 100-107. <https://dspace.kntu.kr.ua/handle/123456789/1448> (дата звернення: 22.06.2026).
9. Dasgupta, B., & Mruthyunjaya, T. S. The Stewart platform manipulator: A review. *Mechanism and Machine Theory*. 2000. 35(1), 15–40. [https://doi.org/10.1016/S0094-114X\(99\)00006-3](https://doi.org/10.1016/S0094-114X(99)00006-3)
10. Dasgupta, B., & Mruthyunjaya, T. S. Singularity-free path planning for the Stewart platform manipulator. *Mechanism and Machine Theory*. 1998. 33(6), 711-725. [https://doi.org/10.1016/S0094-114X\(97\)00095-5](https://doi.org/10.1016/S0094-114X(97)00095-5)
11. Lin, C.-J., & Chen, C.-T. Reconfiguration for the Maximum Dynamic Wrench Capability of a Parallel Robot. *Applied Sciences*. 2016. 6(3), 80. <https://doi.org/10.3390/app6030080>
12. Dash, A. K., Chen, I.-M., Yeo, S. H., & Yang, G. Singularity-free path planning of parallel manipulators using clustering algorithm and line geometry. *Proceedings of the 2003 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. 2003. 1, 761–766. <https://doi.org/10.1109/ROBOT.2003.1241685>

## References

1. Valiavskiy, I. A., Lysenko, O. V., & Lysenko, I. A. (2023). *Technological equipment with parallel kinematics: A textbook*. CNTU [in Ukrainian].
2. Stewart, D. (1965). A platform with six degrees of freedom. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, 180(1), 371–386. [https://doi.org/10.1243/PIME\\_PROC\\_1965\\_180\\_029\\_02](https://doi.org/10.1243/PIME_PROC_1965_180_029_02)
3. Merlet, J.-P. (2006). *Parallel robots* (2nd ed.). Springer. INRIA, Sophia-Antipolis. <https://doi.org/10.1007/1-4020-4133-0>
4. Gosselin, C., & Angeles, J. (1990). Singularity analysis of closed-loop kinematic chains. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 6(3), 281–290. <https://doi.org/10.1109/70.56660>
5. Zlatanov, D., Bonev, I. A., & Gosselin, C. M. (2002). Constraint singularities of parallel mechanisms. *Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA 2002)*, 496–502. <https://doi.org/10.1109/ROBOT.2002.1013408>
6. Merlet, J.-P. (1994). Designing a parallel manipulator for a specific workspace. *The International Journal of Robotics Research*, 16(4), 545–556. <https://doi.org/10.1177/027836499701600407>

7. Huang, Z., Li, Q., & Ding, H. (2013). Theory of parallel mechanisms. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-94-007-4201-7>
8. Pavlenko, I. I., Valiavskiy, I. A., & Hnatiuk, A. O. (2010). Integral workspace of hexapod machine tools. *Machinery in agricultural production, industrial engineering, automation: coll. of science avenue of Kirovohrad National Technical University*, 23, 100–107 [in Ukrainian].
9. Dasgupta, B., & Mruthyunjaya, T. S. (2000). The Stewart platform manipulator: A review. *Mechanism and Machine Theory*, 35(1), 15–40. [https://doi.org/10.1016/S0094-114X\(99\)00006-3](https://doi.org/10.1016/S0094-114X(99)00006-3)
10. Dasgupta, B., & Mruthyunjaya, T. S. (1998). Singularity-free path planning for the Stewart platform manipulator. *Mechanism and Machine Theory*, 33(6), 711–725. [https://doi.org/10.1016/S0094-114X\(97\)00095-5](https://doi.org/10.1016/S0094-114X(97)00095-5)
11. Lin, C.-J., & Chen, C.-T. (2016). Reconfiguration for the maximum dynamic wrench capability of a parallel robot. *Applied Sciences*, 6(3), Article 80. <https://doi.org/10.3390/app6030080>
12. Dash, A. K., Chen, I.-M., Yeo, S. H., & Yang, G. (2003). Singularity-free path planning of parallel manipulators using clustering algorithm and line geometry. *Proceedings of the 2003 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1, 761–766. <https://doi.org/10.1109/ROBOT.2003.1241685>

**Ivan Valiavskiy**, PhD tech. sci., **Oleksandr Lysenko**, Assoc. Prof., PhD tech. sci., **Olexandr Skibinskyi**, Assoc. Prof., PhD tech. sci., **Anton Aparakin**, PhD tech. sci.

*Central Ukrainian National Technical University, Kropyvnytskyi, Ukraine*

### **Kinematic Analysis of the Influence of Hexapod Reconfiguration on Its Workspace**

Parallel kinematics machine tools, particularly hexapods based on the Gough-Stewart platform, offer high structural stiffness and positioning accuracy but suffer from a limited workspace and a high susceptibility to singularities, especially under five-axis machining conditions with significant spindle tilt angles.

This paper introduces a comprehensive mathematical framework and a numerical simulation method for evaluating the "integral workspace" of a reconfigurable hexapod featuring controllable sliding base joints. To ensure kinematic stability and eliminate dimensionality mismatch, the row elements of the kinematic Jacobian matrix are normalized by a characteristic length and mapped directly to the tool tip rather than the platform's geometric center. A dedicated computational script written in Python, utilizing the NumPy and Matplotlib libraries, was developed to implement a polar coordinate space-scanning algorithm combined with Singular Value Decomposition (SVD). The algorithm filters out unstable and singular zones using a strict threshold for the matrix condition number ( $\kappa_{max} = 6$ ). Results. Quantitative analysis of the cross-sectional areas at heights ranging from 200 to 600 mm demonstrates the exceptional efficiency of structural reconfiguration. At a vertical spindle orientation ( $\alpha = 0^\circ$ ), the total effective cross-sectional area increases by 12.7%, while all potential singularity zones are completely excluded from the functional workspace. Under five-axis simulation scenarios, the integration of 64 discrete binary boundary configurations yields a 46.3% area increase at a  $25^\circ$  tilt, and a 76.6% increase at a  $35^\circ$  tilt.

The proposed reconfiguration strategy successfully mitigates the severe workspace reductions typical of traditional parallel robots. Poses that are completely unusable in classical hexapods are effectively restored for stable mechanical processing, laying a solid theoretical foundation for adaptive structural control in advanced machine tool designs.

**hexapod, parallel kinematics, workspace, singularity, Jacobian matrix, integral workspace, condition number**

*Одержано (Received) 24.06.2026*

*Прорецензовано (Reviewed) 25.06.2026*

*Прийнято до друку (Approved) 26.06.2026*