

to develop a metrologically traceable methodology for assessing and controlling surface integrity with due regard to the interchangeability and tribological performance of the pin–bushing pair.

An integrated approach is proposed: the set of indicators is identified (surface roughness, out-of-roundness, microhardness, compressive residual stresses, friction coefficient, and wear rate), and a complete traceability chain to SI standards is established. Four technological routes are compared: P0 – vibratory expanding; P1 – finishing machining; P2 – machining with a standard cutting fluid (coolant–lubricant); P3 – machining with a special cutting fluid containing a biocidal additive. Using DOE plans, factor–parameter models are built and corresponding process windows are determined.

A multicriteria Surface Integrity Index (SII) is proposed, based on desirability functions and a weighted geometric mean, with explicit allowance for measurement uncertainty; recommended decision thresholds are provided. The results confirm the metrological soundness of comparing the routes, support the justified establishment of acceptance criteria, and enable tuning of restoration processes to ensure interchangeability, reduce wear, and increase the predicted service life of the assembly.

**Restoration, surface roughness, wear, surface integrity, residual stresses, microhardness**

*Одержано (Received) 24.09.2025*

*Прорецензовано (Reviewed) 10.11.2025*

*Прийнято до друку (Approved) 23.12.2025*

УДК 519.6:631.5

DOI: <https://doi.org/10.32515/2414-3820.2025.55.148-162>

**О.Д. Онопрієнко**, доц., д-р філософії, **Е.Б. Алієв**, ст. досл., проф., д-р техн. наук,  
**В.Б. Говоруха**, проф., д-р фіз.-мат. наук  
*Дніпровський державний аграрно-економічний університет, м. Дніпро, Україна*  
*e-mail: aliev@meta.ua*

## Фізико-математична модель щільної випадкової упаковки насіння олійних культур

У роботі запропоновано чисельну DEM-модель щільного випадкового укладання насіння гірчиці в циліндричному об'ємі. Досліджено процес осідання сферичних частинок під дією сили тяжіння з урахуванням міжчастинкових взаємодій: контактних сил, тертя, прокочування та відскоку. Для опису контактів застосовано нелінійну модель Герца–Міндліна, що забезпечує адекватне відтворення реальних процесів засипання та ущільнення сипких матеріалів.

**сипкі матеріали, насіння, олійні культури, гірчиця, випадкова упаковка, фізико-механічні властивості, моделювання, метод дискретних елементів, стиск, пружність, модель Герца–Міндліна**

**Постановка проблеми.** У сільському господарстві важливо розуміти, як насіння дрібнонасінневих олійних культур укладається всередині бункерів і ємностей. Від цього залежать точність дозування та рівномірність висіву, втрати під час транспортування, умови зберігання й навантаження на обладнання. Значення має те, наскільки щільно насіння лягає (скільки порожнин у насипі), скільки контактів між насінинами та чи виникають «арки», що можуть зупиняти потік. У циліндричних ємностях додатковий вплив чинять стінки: біля них шар ущільнюється, а щільність може змінюватися по висоті. Тому потрібні прості й надійні моделі, які показують, як поводить ся насип під час засипання, вібрації та пресування.

У цій роботі апробовано дискретно-елементну (DEM) модель щільного випадкового укладання «сферизованих» насінини дрібнонасінневих культур (на прикладі

гірчиці) в циліндрі. Також ураховано дію сили тяжіння, неоднорідність розміру насіння, тертя, демпфування та опір коченню. Контакти між насінинами описано моделлю Герца–Міндліна: сила опору різко зростає при зближенні насінин, а ковзання враховується через тертя.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Фізико-механічні властивості насіння гірчиці, як і інших олійних культур (наприклад, ріпаку, насіння соняшнику) [5, 6], критично впливають на їхнє укладання та плинність. За даними літератури, істинна щільність насіння гірчиці становить приблизно  $1,17\text{--}1,20\text{ г/см}^3$ , а насипна щільність – близько  $0,73\text{--}0,75\text{ г/см}^3$  [4, 6]. Це свідчить про значну частку пористості (пористість близько 37–38%). Фрикційні властивості насіння традиційно описуються коефіцієнтами тертя, вимірними при взаємодії насіння між собою та з різними поверхнями. Так, в роботі [4] вказано, що кут внутрішнього тертя гірчиці (що відповідає коефіцієнту тертя близько 0,20) і модуль Юнга близько 5 МПа дають реалістичні результати при DEM-моделюванні. Інші дослідження вказують на кут тертя  $30^\circ$  та коефіцієнт тертя об стінки близько 0,08–0,10 в експериментах зі змішаними насінинами гірчиці [4, 5]. Експериментальні вимірювання механічної міцності окремого насіння гірчиці показують силу руйнування на рівні десятків ньютонів (наприклад, приблизно 21–25 Н за методом компресійного тесту для різних сортів) [5, 6].

Моделювання випадкового укладання сферичних частинок традиційно реалізується різними методами, зокрема статичними алгоритмами (наприклад, Jodrey–Toyu, випадкове послідовне додавання) або динамічним методом заповнення під дією гравітації [20]. Теоретично доведено, що середня щільність максимально щільного випадкового укладання однакових сфер (random close packing) становить близько 0,632, що добре підтверджують чисельні дослідження [2, 20]. З іншого боку, «вільні» (неуцілені) укладання (random loose packing) досягають щільності приблизно 0,55–0,58. У роботах [2] показано, що при DEM-імітації падіння сфер у контейнер утворений масив набуває граничної щільності близько 0,632. Для генерації випадкових структур також застосовували метод Монте-Карло, при якому координати куль задаються випадковим чином до досягнення кінцевої щільності. Таким чином, моделювання було сфокусовано на досягненні статично стійких конфігурацій, де середній коефіцієнт заповнення об'єму (volume fraction) становить приблизно 0,63 [2].

Контактні моделі є ключовими при DEM-симуляціях сипучих систем [1, 7]. Найпоширенішою є модель Герца–Міндліна (часто з умовою 'no-slip' – без проковзування) для сухих, безадгезивних частинок [1]. Вона враховує нелінійний закон стиску двох пружних тіл за Герцом (описуючи пружну деформацію при контакті) та модифікацію Міндліна для дотичних сил (тертя ковзання). Наприклад, у моделі Герца–Міндліна нормальна сила розраховується як функція від величини перекриття зерен у степені  $3/2$ , а дотична сила – за аналогічним пружним та демпфуючим законом (до досягнення межі тертя Кулона) [1, 7]. Такі моделі широко використовуються для симуляції сипких зернових матеріалів [7, 11]. Зауважимо, що для клейких чи зв'язаних частинок можуть застосовуватися розширення (JKR, моделі зі зв'язками) [1], однак у нашому випадку насіння гірчиці розглядається як незв'язний (сипкий) матеріал.

Метод дискретних елементів (DEM) здобув популярність в аграрному моделюванні завдяки здатності прогнозувати рух індивідуальних зерен [8, 11]. Так, огляд [9] демонструє широке застосування DEM у моделюванні сільськогосподарських процесів, зокрема для опису взаємодії ґрунту, рослин та машин [8, 10]. У розроблених DEM-моделях насіння гірчиці моделюються у вигляді невеликих сфер із визначеними властивостями (щільністю, коефіцієнтами тертя, коефіцієнтом реституції тощо) [11, 15]. Використовуються як явний метод інтегрування (explicit) із постійним малим

часовим кроком, так і спеціалізовані модулі для моделювання багатьох частинок у програмному забезпеченні, наприклад Simcenter Star-CCM+. В Simcenter Star-CCM+ частинки моделюються як жорсткі елементи з кількома ступенями свободи і взаємодіють за загальною схемою контакту з використанням моделі Герца або штрафних методів [1]. Зокрема, у DEM-модулі Simcenter Star-CCM+ за замовчуванням використовується штрафний алгоритм, але можливий вибір нелінійного закону Герца–Міндліна для відображення реальних пружних зміщень на контактній площині [1, 7]. Таким чином, поєднання параметрів контакту (жорсткість, демпфування, тертя) дозволяє адекватно відтворити укладання насіння.

Прикладом застосування DEM до зернових є роботи, де моделювали укладання насіння соняшника, кукурудзи та пшениці [13, 15, 17]. Численні публікації підтверджують, що вибір параметрів демпфування та жорсткості суттєво впливає на кінцеву структуру укладання [7, 12]. Це особливо важливо для процесів, пов'язаних із висівом, транспортуванням та сепарацією [14, 16, 18, 19]. Також в літературі повідомляється, що тип програмного засобу (EDEM, LIGGGHTS, PFC, Abaqus) змінює лише технічну реалізацію, але суть моделювання залишається схожою [9, 11]. У нашій роботі для симуляції використовувався Simcenter Star-CCM+ з DEM-засобами, що дозволило реалізувати моделювання осідання ~30 тис. сферичних тіл.

**Постановка завдання.** Мета дослідження – чисельно показати, як формується щільна випадкова укладка, і проаналізувати її основні параметри (щільність/пористість, середнє координаційне число, вплив налаштувань контакту), щоб надалі допомогти інженерам краще підбирати розміри ємностей і режими роботи обладнання.

**Виклад основного матеріалу.** На початку моделювання визначені основи фізико-механічні характеристики насіння дрібнонасіневих культур (на прикладі гірчиці).

*Розмір і форма.* Насіння гірчиці мають майже кулясту форму. Середній діаметр насінин становить приблизно 2–3 мм; зокрема, для сорту гірчиці «Тавричанка» (селекція ІОК НААН) діаметр коливається в межах 2,1–3,2 мм. Форма близька до сферичної (сферичність приблизно 0,9), тому їх доцільно апроксимувати сферами однакового ефективного діаметра.

*Густина.* Розрізняють істинну густину матеріалу насінини та насипну (bulk) густину шару насіння. Істинна густина зерен гірчиці становить приблизно 1,15–1,20 г/см<sup>3</sup> (1150–1200 кг/м<sup>3</sup>), що близько до густини води (через високий вміст олії). Насипна густина сипкого насіння помітно нижча – близько 0,70–0,75 г/см<sup>3</sup> (700–750 кг/м<sup>3</sup>) при типових умовах зберігання. Саме значення приблизно 700 кг/м<sup>3</sup> часто використовується в розрахунках як ефективна густина частинок у моделюванні.

*Модуль пружності (Юнга).* Механічна жорсткість насінин доволі невелика, адже всередині вони містять олійний ендосперм. Літературні дані різняться: для гірчичного насіння наводяться значення пружного модуля від десятків кПа до кількох МПа. Зокрема, при моделюванні дискретних елементів гірчиці використовували  $E \approx 0,2$  МПа. Інші дослідники наводять більші значення – наприклад, приблизно 5 МПа, трактуючи насіння як “тверді” частинки. Вибір  $E$  залежить від того, чи моделюється пружна деформація без руйнування (нижчі значення) або імітується більш тверде насіння. Для подальших розрахунків приймаємо  $E \approx 2 \cdot 10^5$  Па (0,2 МПа) як базове значення, розуміючи його умовність.

*Коефіцієнт Пуассона:*  $\nu \approx 0,20$  для насіння. Це типовий показник для органічних зерен, що вказує на незначне бокове розширення при стисканні.

*Коефіцієнт тертя.* Насіння доволі шорсткі, мають значне внутрішнє та зовнішнє тертя. Статичний коефіцієнт тертя ковзання насінина–насінина (або насінина–

стінка) знаходиться в межах  $\mu \approx 0,5-0,6$ . Експериментально для гірчиці отримано значення приблизно 0,58 (в стані спокою), що відповідає куту природного укусу близько  $\arctg(0,58) \approx 30^\circ$ . Динамічний коефіцієнт тертя може бути дещо меншим (близько 0,2–0,3 в окремих моделях, залежно від гладкості поверхонь і масштабу моделі).

*Інші параметри для моделювання контакту.* Для розрахунків за дискретно-контактною моделлю задаються також коефіцієнти відновлення та опору коченню. Коефіцієнт реституції (еластичності удару) для насіння гірчиці оцінений на рівні 0,5 (тобто при зіткненнях губиться приблизно 50% енергії). Враховується і опір коченню – безрозмірний коефіцієнт порядку 0,3, що визначає момент тертя, який перешкоджає чистому перекочуванню однієї насінини по іншій. Значення 0,3 означає, що максимальний момент тертя перекочування можна взяти як приблизно  $M_t = 0,3F_nR$  (де  $F_n$  – нормальна сила,  $R$  – радіус насінини).

*Міцність насіння.* Хоча модель не вимагає цього параметра явно, варто зазначити, що насіння гірчиці доволі міцні на роздавлювання. Експериментально зареєстровано, що зусилля близько 20–25 Н достатньо для руйнування (розтрощення) однієї насінини між пластинами. Це накладає обмеження на граничну силу стиснення: при перевищенні цього порогу модель пружного контакту вже буде непридатною, оскільки почнеться дроблення зерен. У нашій моделі ми припускаємо пружні деформації без руйнування до певної межі.

Зібрані характеристики резюмують властивості, необхідні для побудови моделі: геометричні розміри (2–3 мм), густина ( $700 \text{ кг/м}^3$  ефективна), пружні модулі ( $E \sim 0,2 \text{ МПа}$ ,  $\nu \sim 0,2$ ), коефіцієнти тертя (0,58) та реституції (0,5). Ці дані будемо використовувати надалі в математичній моделі упаковки.

*Математична модель щільного випадкового пакування.* Розробимо математичну модель щільної випадкової упаковки насіння гірчиці в циліндричному об'ємі (пресувальній камері). Модель включає: 1) геометричне представлення насіння згідно з узагальненою сферичною моделлю, 2) статистичний ізотропний розподіл частинок у об'ємі та характеристику щільності пакування, 3) контактну взаємодію частинок за моделлю Герца–Міндліна, 4) оцінки основних параметрів – щільності, кількості насінин та сили стиску при пресуванні.

*Геометрична модель насіння та ізотропна упаковка.* Апроксимація формою кулі: геометрично кожен насінину гірчиці моделюємо як сферу певного діаметра  $D$ . Такий підхід обґрунтований майже кулястою формою реальних насінин. Для врахування розміру реальних зерен можна задати розподіл діаметрів. Наприклад, якщо середній діаметр становить  $\bar{D} = 2,5 \text{ мм}$ , то варіацію можна змоделювати коефіцієнтом варіації приблизно 0,1–0,2 (10–20%). У чисельному моделюванні дискретних елементів часто використовують нормальний або рівномірний розподіл діаметрів в заданому діапазоні. Узагальнена сферична модель передбачає, що всі насінини – кулі (або кульові частинки) із цього розподілу, без врахування інших складнощів форми.

*Ізотропний просторовий розподіл.* Під випадковою щільною упаковкою розуміємо, що центри насінин в об'ємі розташовані випадково (відсутня регулярна решітка), а орієнтація частинок неупорядкована (у випадку куль це несуттєво). Ізотропність означає, що статистичні властивості упаковки (наприклад, координаційне число контактів, щільність) однакові у всіх напрямках простору – немає переважного впорядкування в якомусь напрямі. Досягнути ізотропного щільного пакування можна уявним “струшуванням” або осадженням насіння у контейнері без ущільнення шарами (рис. 1).

*Циліндричний об'єм.* Пресувальна камера моделюється як циліндр радіуса  $R_{\text{цил}}$  і висоти  $H$ . На стінки та дно циліндра можуть накладатися граничні умови (жорсткі непроникні стінки). Насіння вільно заповнюють цей об'єм. При вільному засипанні насіння під дією гравітації можливе утворення невеликого градієнта щільності по висоті (дещо щільніше укладення внизу). Проте, у моделі ми можемо для спрощення спочатку вважати однорідну ізотропну упаковку з певною середньою щільністю, а питання гравітаційного ущільнення врахувати на етапі чисельного моделювання (осадження частинок).

*Щільність упаковки.* Визначимо щільність пакування  $\phi$  як частку об'єму, зайнятого твердими частинками насіння, від загального об'єму контейнера. Для щільної випадкової упаковки однакових сфер відомо, що  $\phi$  досягає 0,58–0,64 ( $\phi \approx 60\%$ ) – це так звана межа випадкового щільного пакування. У наших умовах очікуємо  $\phi$  близько 0,60 (60%). Більш точне значення залежить від розподілу розмірів і тертя: монодисперсні кулі без тертя можуть досягати 0,63–0,64; наявність тертя та випадкового укладання зазвичай дає близько 0,58–0,60. Якщо ж є різнорозмірні насінини (полідисперсність), дрібніші можуть вкладатися у проміжки між більшими, злегка підвищуючи загальну  $\phi$ . За даними чисельного експерименту, варіація діаметрів приблизно 20% підняла щільність упаковки з 0,56 до 0,60. Тому для гірчиці (діапазон 2–3 мм) справедливо прийняти  $\phi \approx 0,60$ –0,62 як щільність пресованого шару. Приклад: моделювання випадкової упаковки дрібнонасіненних культур показало, що при середньому діаметрі 2 мм і коефіцієнті варіації 0,2 щільність  $\phi \approx 0,594$  (59,4%). Це узгоджується з очікуваним інтервалом 0,58–0,62.

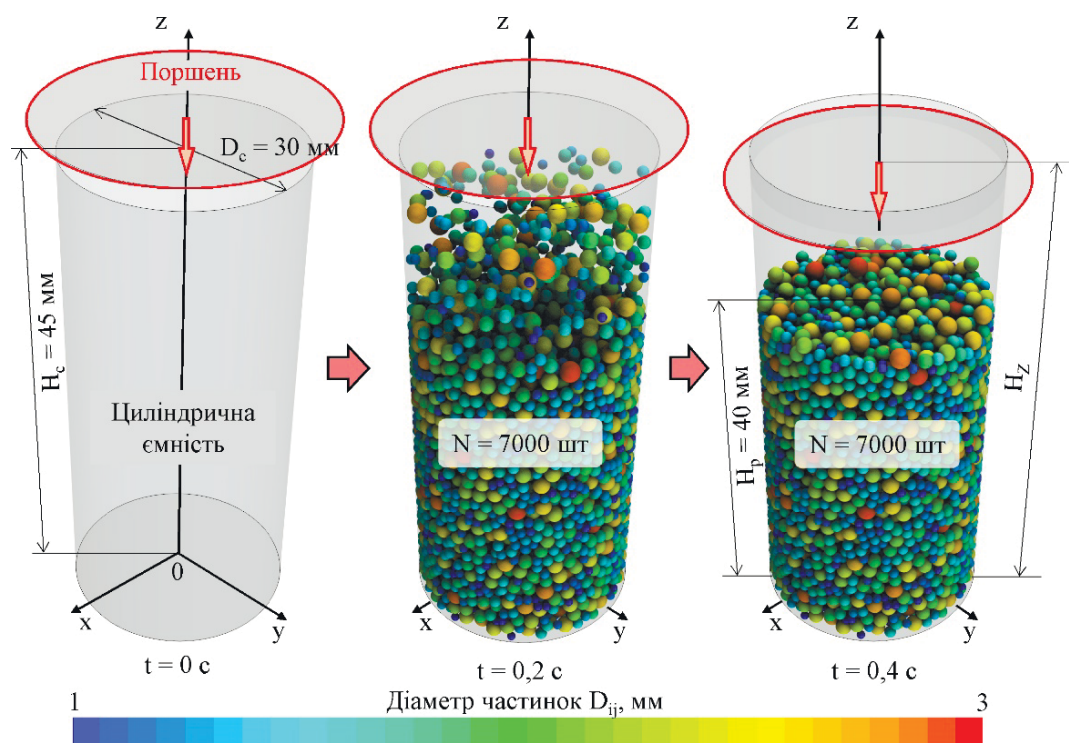


Рисунок 1 – Об'ємна модель випадкової щільної упаковки в циліндричній камері  
Джерело: розроблено авторами

Кількість насінин у заданому об'ємі. Знаючи  $\phi$ , можна оцінити кількість насінин  $N$  в циліндрі. Якщо об'єм циліндра  $V_{\text{цил}} = \pi R_{\text{цил}}^2 H$ , а середній об'єм однієї насінини  $V_{\text{нас}}$ , тоді

$$N \approx \frac{\phi V_{\text{цил}}}{V_{\text{нас}}}. \quad (1)$$

Об'єм однієї насінини (сфери діаметром  $D$ ) дорівнює  $V_{\text{нас}} = \pi D^3/6$ . Підставивши, маємо зручну формулу

$$N \approx \frac{\phi \pi R_{\text{цил}}^2 H}{\pi D^3/6} = \frac{6\phi R_{\text{цил}}^2 H}{D^3}. \quad (2)$$

Розрахунок  $N$  важливий для ініціалізації моделі (щоб знати, скільки частинок генерувати в межах об'єму).

*Контактна взаємодія: модель Герца–Міндліна.* Нормальна контактна сила (пружність за Герцем): при стику двох пружних куль радіусів  $R_1$  і  $R_2$  виникає нелінійна пружна сила згідно з теорією Герца. Для перекриття (взаємного стиснення)  $\delta$  нормальна компонента сили визначається як

$$F_n = \frac{4}{3} E^* \sqrt{R^*} \delta^{3/2}. \quad (3)$$

Це формула Герца для сили пружного стиску двох сфер. Тут  $R^*$  – еквівалентний радіус контакту:  $R^* = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$ . Для двох однакових куль радіуса  $R$  маємо  $R^* = R/2$ ; для контакту «куля–плоска стінка»  $R^* = R$  (бо  $R_2 \rightarrow \infty$ ).  $E^*$  – еквівалентний модуль Юнга двох матеріалів

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}. \quad (4)$$

Якщо матеріал обох частинок однаковий (наприклад, насіння гірчиці з  $E$  та  $\nu$ ) і друга поверхня – стінка жорстка, то  $E^* \approx E/(1-\nu^2)$ . У моделі ж двох однакових куль  $E^* = E/2(1-\nu^2)$ . Підставляючи характерні значення ( $E = 0,2$  МПа,  $\nu = 0,2$ ,  $R \approx 1$  мм) можна оцінити жорсткість контакту. Важливо, що сила росте як ступінь  $3/2$  відносно малого перекриття  $\delta$ , тобто контакт є сильно нелінійним (при збільшенні стиску сила зростає нелінійно).

*Тангенціальна (дотична) сила та тертя (модель Міндліна).* При відносному зсуві двох частинок у контакті виникає сила тертя, яка протидіє зсуву. Модель Герца–Міндліна доповнює нормальну силу пружним тангенціальним елементом з урахуванням тертя ковзання. Якщо контакти не ковзають (режим прилипання), то мале дотичне переміщення  $\Delta s$  породжує тангенціальну силу

$$F_t = K_t \Delta s, \quad (5)$$

де  $K_t$  – ефективна тангенціальна жорсткість контакту. Для пружних сфер вона залежить від поточного нормального навантаження (через площу контакту) і визначається як

$$K_t = 8G^* \sqrt{R} \delta, \quad (6)$$

де  $G^* = G/2$  для двох однакових матеріалів (еквівалентний модуль зсуву). Ця залежність впливає з розв'язку Міндліна–Дересевича для зсуву у контакті пружних тіл. Тангенціальна сила не може зростати безмежно – вона обмежена умовою кулонівського тертя. При досягненні критичного значення

$$F_t = \mu F_n, \quad (7)$$

відбувається ковзання (часткове або повне), де  $\mu$  – коефіцієнт тертя ковзання між насінинами (для статичного випадку  $\mu_s \approx 0,58$ ). Отже, модель Міндліна: поки  $F_t < \mu F_n$ , контакт поводить себе пружно (без відносного проковзування, тільки пружна деформація мікрозчеплення); як тільки поріг досягнуто, реалізується стан ковзання з  $F_t = \mu F_n$ . У чисельних методах це реалізується відстеженням «історії» дотичного зсуву в контакт і обнуленням накопиченої пружної складової при ковзанні.

*Демпфірування (втрати) та коефіцієнт відновлення.* Реальні насінини при ударах втрачають енергію (звук, пластичні мікродеформації тощо). У моделі це враховано через нормальний і дотичний демпфер – в'язові сили, пропорційні відносній швидкості зближення/зсуву. Принципово, демпферні коефіцієнти підбирають так, щоб забезпечити заданий коефіцієнт реституції  $e$  (відновлення). Зв'язок задається формулами типу

$$N_{\text{damp}}^n = -2 \sqrt{\frac{m_{\text{eff}} K_n}{\pi^2 + (\ln e_n)^2}}, \quad (8)$$

де  $m_{\text{eff}}$  – приведена маса двох частинок;

$K_n$  – нормальна жорсткість (з рівняння Герца);

$e_n$  – заданий коефіцієнт відновлення (нормальний). Аналогічна формула для тангенціального демпфера через  $K_t$  і  $e_t$ . В результаті при кожному ударі частина кінетичної енергії гаситься, і величина  $e = 0,5$  означає, що після удару відносна швидкість зменшується вдвічі. У наших розрахунках прийнято  $e_n = e_t = 0,5$ , що забезпечується налаштуванням демпфування.

*Опір коченню.* Окремо враховується момент сили, що протидіє чистому перекочуванню сфер одна по одній без ковзання. Причина – мікрошорсткість та неідеально пружні деформації в контактній області. Простий спосіб у DEM-моделях – ввести коефіцієнт  $\mu_r$  (опору коченню), який задає максимальний момент  $M_r = \mu_r F_n R^*$ , аналогічно до сили тертя ковзання. При  $\mu_r = 0,3$  момент опору становить приблизно 30% від моменту, який би викликав чисте перекочування без пробуксовки. Цей момент лінійно (або пружно) протидіє відносному обертанню частинок. Врахування опору коченню істотно впливає на стабільність укладання: без нього частинки можуть надто легко перекочуватися, що не цілком відповідає реальності. Ми використовуємо значення  $\mu_r = 0,3$  згідно з літературними даними.

Таким чином, контактна модель Герца–Міндліна в нашій задачі включає: нелінійну пружність при стиску ( $F_n \sim \delta^{3/2}$ ), пружне/слизьке тертя ( $F_t \leq \mu F_n$  з жорсткістю  $K_t(\delta)$ ), дисипацію енергії (демпфери для отримання  $e = 0,5$ ) та обмеження кочення (через  $\mu_r$ ). Ця модель добре зарекомендувала себе для моделювання взаємодії зернистих матеріалів і реалізована в багатьох програмних комплексах.

*Оцінка сили стиснення при пресуванні. Схема пресування.* Розглянемо щільно заповнений насінням циліндр висотою  $H_0$  (до пресування). Ущільнення здійснюється поршнем (пластиною), що рухається зверху вниз, стискаючи шар (рис. 2). Цікавить сила стиснення  $F_c$ , яку поршень має прикласти, щоб досягти певного прогресу  $\Delta H$  (зменшення висоти шару). В рамках пружно-контактної моделі цю силу визначають

контакти між поршнем і верхніми насінинами та подальшим ланцюжком контактів між усіма насінинами.

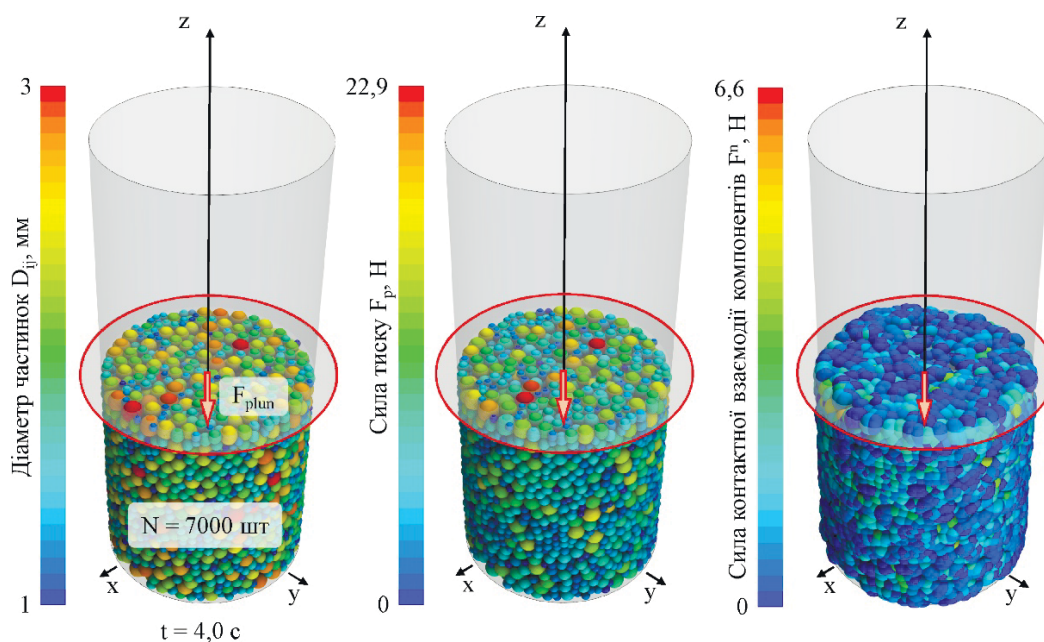


Рисунок 2 – Процес пресування насіння в циліндричній камері

Джерело: розроблено авторами

*Контакти поршня з насінням.* При натисканні поршень спочатку торкається верхніх насінин. Число насінин, що безпосередньо контактують з поршнем, можна оцінити як  $N_{\text{top}} \approx A_{\text{пор}} / A_{\text{прое}}$ , де  $A_{\text{пор}} = \pi R_{\text{цил}}^2$  – площа поршня, а  $A_{\text{прое}}$  – середня площа горизонтальної проекції на одну насінину. Якщо насінини укладені щільно в площині, то 2D-пакування кіл має коефіцієнт заповнення близько 0,9 (гексагональна укладка) або приблизно 0,8 для випадкового випадку. Тому грубо  $N_{\text{top}} \approx 0,8 A_{\text{пор}} / (\pi(D/2)^2) = 0,8 \cdot 4 A_{\text{пор}} / \pi D^2$ . Для спрощення порядку оцінок вважатимемо  $N_{\text{top}} \sim 4 A_{\text{пор}} / \pi D^2$  (підставляючи числовий множник пізніше).

Кожна верхня насінина зазнає деформації  $\delta$  під поршнем. Якщо переміщення поршня  $\Delta H$ , то максимальне стискання верхніх контактів приблизно  $\delta \approx \Delta H$  (у перший момент, поки інші шари ще не ущільнились). Надалі деформація розподіляється між шарами, але для оцінки сили припустимо, що порядку  $\Delta H$  припадає на сумарну деформацію всіх контактів по висоті. Верхні контакти отримують дещо меншу  $\delta$ , але сусідні контакти між насінинами також деформуються. У сильно щільному пакуванні можна вважати, що відносне скорочення висоти  $\Delta H / H_0$  розподіляється по контактах рівномірно. Якщо середній діаметр  $D$  і початкова висота містить приблизно  $H_0 / D$  шарів насінин, то орієнтовно кожен шар стискається приблизно на  $\Delta H \cdot D / H_0$ . Тоді перекриття в одному контакті  $\delta$  буде порядку цієї величини. Для наближених оцінок припустимо  $\delta \sim \Delta H \cdot D / H_0$ .

*Сила пресування* (рис. 3). Сумарна сила на поршні – це сума сил у всіх його контактах з насінням

$$F_c \approx N_{\text{top}} \cdot F_n(\delta). \quad (9)$$

Підставимо формулу Герца для  $F_n$  (контакт «поршень–насінина» можна моделювати як куля радіуса  $R$  і площина, тож  $R^* = R$ ,  $E^*$  відомий)

$$F_c \approx N_{\text{тор}} \cdot \frac{4}{3} E^* \sqrt{R} \delta^{3/2}. \quad (10)$$

Тепер виразимо все через відомі параметри:  $N_{\text{тор}} \approx 4A_{\text{пор}}/\pi D^2$ ,  $A_{\text{пор}} = \pi R_{\text{цил}}^2$ ,  $R = D/2$ ,  $\delta \approx \Delta H \cdot D/H_0$ . Після підстановки

$$F_c \approx \frac{4(\pi R_{\text{цил}}^2)}{\pi D^2} \frac{4}{3} E^* \sqrt{\frac{D}{2}} \left( \frac{\Delta H}{H_0} D \right)^{3/2}. \quad (11)$$

Спростуємо коефіцієнти

$$\frac{4(\pi R_{\text{цил}}^2)}{\pi D^2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{16 R_{\text{цил}}^2}{3 D^2}. \quad (12)$$

Далі

$$\sqrt{\frac{D}{2}} (\Delta H D / H_0)^{3/2} = \sqrt{\frac{D}{2}} \frac{D^{3/2} (\Delta H)^{3/2}}{H_0^{3/2}} = \frac{D^2 (\Delta H)^{3/2}}{\sqrt{2} H_0^{3/2}}. \quad (13)$$

В результаті

$$F_c \approx \frac{16}{3\sqrt{2}} E^* R_{\text{цил}}^2 \frac{D^2 (\Delta H)^{3/2}}{H_0^{3/2}}. \quad (14)$$

Цікаво, що  $D^2$  скорочується. Залишається:

$$F_c \approx C E^* A_{\text{пор}} \left( \frac{\Delta H}{H_0} \right)^{3/2}, \quad (15)$$

де  $A_{\text{пор}} = \pi R_{\text{цил}}^2$ , а  $C = 16/(3\sqrt{2}\pi)$  – чисельна стала  $C \approx 0,37$ . Для оцінок можна писати

$$F_c \sim 0,4 E^* A_{\text{пор}} \left( \frac{\Delta H}{H_0} \right)^{3/2}. \quad (16)$$

Ця формула дає аналітичну залежність сили від відносної деформації шару на основі пружної моделі контактів. Вона показує нелінійний характер: сила зростає приблизно пропорційно  $(\Delta H)^{3/2}$  при невеликих  $\Delta H$ .

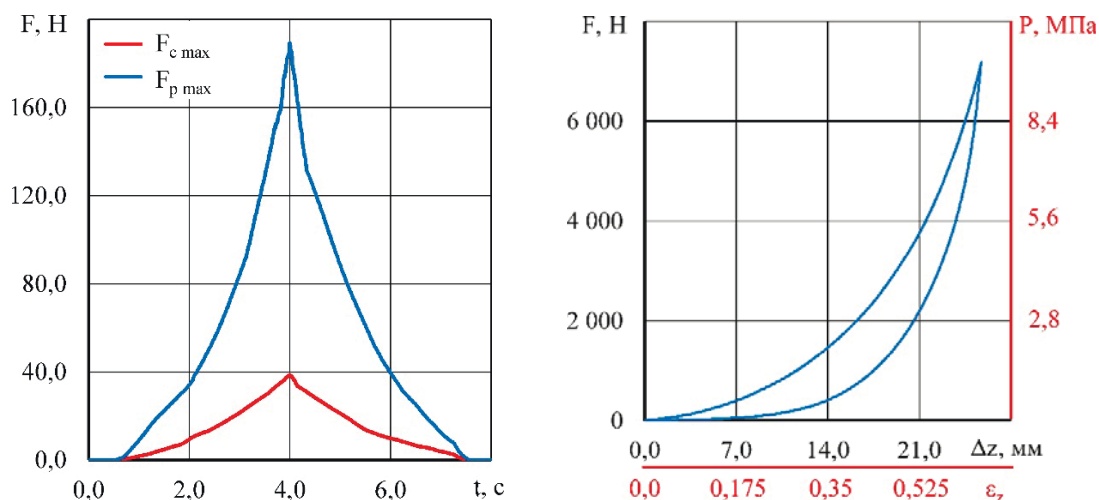


Рисунок 3 – Крива сила–переміщення поршня під час ущільнення шару

Джерело: розроблено авторами

Аналітична модель прогнозує нелінійне зростання сили стиску при зменшенні висоти шару. На початковій стадії стискування (декілька відсотків) сила невелика, але різко зростає при подальшому ущільненні. Отримана формула (або її спрощені варіанти) може бути використана для оцінки потреби зусилля пресування залежно від ступеня ущільнення насінневого матеріалу.

*Чисельна реалізація моделі в Simcenter Star-CCM+.* Для перевірки та застосування розробленої моделі виконаємо чисельне моделювання пакування і пресування насіння гірчиці за допомогою програмного комплексу Simcenter Star-CCM+ (аналіз методом кінцевих елементів, з можливістю DEM). Нижче подано алгоритм реалізації.

*Геометрія системи:* Створюється геометрична модель циліндричної пресувальної камери. Це вертикальний циліндр радіуса  $R_{\text{цил}} = 15$  мм і висоти  $H = 45$  мм (з запасом висоти для поршня). У Simcenter Star-CCM+ можна змодельовати стінки циліндра як нерухомі тверді тіла (аналітичні поверхні) або як тонку оболонку з великим модулем, закріплену на місці. Дно циліндра – нерухома жорстка пластина. Зверху передбачається рухомий поршень (жорсткий диск радіуса  $R_{\text{цил}} = 15$  мм), що здійснюватиме стиснення.

*Створення частинок-насінин.* У Simcenter Star-CCM+ реалізовано спеціальний підхід для дискретних елементів (DEM-пакети). Кожна насінина моделюється як окрема частинка (particle), переважно сферичної форми. У нашому випадку можна використати Particle Generator – генератор частинок Simcenter Star-CCM+, що динамічно додає кульові частинки в заданому об'ємі. Налаштовуємо генератор таким чином:

*Область генерації* – простір всередині циліндра (вище дна, нижче початкового положення поршня).

*Кількість частинок* – розраховане значення  $N = 7000$  шт., або Simcenter Star-CCM+ може сам генерувати до заповнення об'єму.

*Розподіл радіусів* – задаємо середній радіус  $R = D / 2$  і, за потреби, статистичне відхилення (можна визначити нормальний розподіл з коефіцієнтом варіації приблизно 0,1–0,2, або ж кілька фракцій діаметрів). Наприклад, можна задати: Distribution: Normal(mean=1.25 mm, std=0.15 mm) для радіуса.

*Швидкість генерації* – генератор може додавати частинки пачками або поступово, щоб уникати надмірних початкових перекриттів. В нашому випадку зручно поступово “засипати” насіння: генерувати невелику кількість частинок у верхній частині, дати їм осісти, потім додати наступні і т.д., допоки не заповниться весь об'єм до заданої висоти. Simcenter Star-CCM+ дозволяє генерувати до 100 000 частинок впродовж аналізу, що для нашої задачі більш ніж достатньо (потрібно порядку  $10^4$  –  $10^5$  частинок залежно від розмірів установки).

*Матеріальні властивості частинок.* Задаємо створеним DEM-частинкам властивості, зібрані раніше:

Густина матеріалу  $\rho = 700$  кг/м<sup>3</sup> (ефективна густина кожної кульки).

Модуль Юнга  $E = 2 \cdot 10^5$  Па, коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,2$ .

Коефіцієнти тертя та відновлення:  $\mu = 0,58$  (фрикція насінина-насінина і насінина-стіна);  $\mu_t = 0,3$  – коефіцієнт тертя кочення; коефіцієнти реституції  $e_n = e_t = 0,5$ .

Ці параметри в Simcenter Star-CCM+ вводяться через налаштування Interaction Properties для DEM-паketу. Simcenter Star-CCM+ підтримує Hertzian contact method для частинок. Ми активуємо цю опцію, щоб контактні взаємодії автоматично слідували закону Герца (нелінійна жорсткість), а не спрощеному лінійному закону. В інтерфейсі Simcenter Star-CCM+ це може бути реалізовано як вибір моделі контактної сили Герца-Міндліна з введенням  $E$ ,  $\nu$ ,  $e$  і  $\mu$  для пар частинок і для пар частинка-стіна.

Важливо зазначити, що DEM-частинки в Simcenter Star-CCM+ моделюються як абсолютно тверді кульки з масою в центрі. Їх пружність проявляється саме через закон контакту (штучна пружність взаємодії). Тобто деформація моделюється перекриттям твердих частинок з силою, що визначена  $E^*$ . Таким чином, вводити сітку чи форму частинки не потрібно – достатньо радіуса і матеріальних констант для контактного закону.

*Граничні умови та початкові умови.* На початку аналізу частинки можуть генеруватися з нульовою початковою швидкістю в верхній частині ємності. Вмикаємо гравітацію (напрямок вниз, прискорення  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ ), щоб насіння саме осіло в контейнері під власною вагою. Стінки циліндра задаються як нерухомі, з умовою невзаємного прориву (hard contact) між ними і частинками. Коефіцієнт тертя стінка-насіння беремо таким самим (близько 0,5–0,6) або трохи меншим, якщо стінки більш гладенькі (наприклад, 0,4). Дно нерухоме, поршень поки що тримаємо піднятим над шаром.

Для того щоб отримати щільну упаковку, можна здійснити попереднє ущільнення: наприклад, після засипання і осідання самопливом може утворитися дещо пухкий шар (щільність близько 0,55). Щоб досягти  $\phi \sim 0,60$ , можна задати легку вібрацію або низхідне переміщення-зйняття поршня без значного зусилля. В Simcenter Star-CCM+ це реалізується або прикладанням вертикальних коливань до контейнера, або короткочасним натисканням поршнем з невеликою силою і відпусканням. Ми припускаємо, що після осадження під власною вагою і, за потреби, невеликого струшування, матеріал досягне стану щільного випадкового укладання з необхідною  $\phi$  (це підтвердиться підрахунком  $N$  та перевіркою об'єму пустот).

*Пресування (навантаження поршнем).* На наступному етапі моделюємо рух поршня вниз для ущільнення насіння. Поршень можна задати як аналітичне жорстке тіло з прикладеним переміщенням або силою. Щоб отримати повну криву “сила–переміщення”, доцільно задати керування переміщенням: опустити поршень на потрібну величину  $\Delta H$  (наприклад, 50% висоти шару) і зареєструвати реакцію. В Simcenter Star-CCM+ рух поршня реалізуємо через функцію амплітуди: поступове переміщення вниз із малою швидкістю, щоб процес був квазістатичним (звести до мінімуму інерційні ефекти). Наприклад, для  $H_0 = 0,1 \text{ м}$  можна задати переміщення 0,05 м за 0,1 с, тобто середня швидкість 0,5 м/с – це досить швидко. Краще повільніше, скажімо 0,1 м/с, і з наступною витримкою, аби коливання затухли. Критерієм квазістатичності служитиме співвідношення кінетичної енергії системи до роботи сили – воно має бути малим.

При стисканні поршнем Simcenter Star-CCM+ автоматично враховує контакти поршень-частинки і між частинками. Використовуючи general contact в Simcenter Star-CCM+, всі взаємодії частинка-частинка і частинка-стінка обробляються на основі заданої моделі Герца-Міндліна. Завдяки вбудованому алгоритму, часовий крок автоматично підбирається для стійкості розрахунку навіть при нелінійному контакті.

*Вимірювання величин.* Щільність пакування: можна обчислити по завершенні осадження, поділивши сумарний об'єм частинок (відомий як  $NV_{\text{нас}}$ ) на об'єм зайнятий ними (наприклад,  $\pi R_{\text{цил}}^2 H_{\text{заповн}}$ ). В Simcenter Star-CCM+ можна визначити положення верхнього шару після осідання – це буде висота  $H_{\text{заповн}} = 40$  мм. Так ми перевіримо, що  $\phi$  досягла приблизно 60%. Якщо ні – можна повторити стадію струшування/ущільнення.

Кількість частинок: має збігатися з запланованим  $N$ . Це контроль правильності генерації.

Сила стиску: Simcenter Star-CCM+ дозволяє записувати реакцію опори поршня (RF, reaction force) або контактний тиск на поршні. Ми одержимо залежність  $F_c(t)$  під час руху поршня. Потім цю залежність можна інтерпретувати як функцію від переміщення  $F_c(\Delta H)$ . Для статичного стану після зупинки поршня  $F_c$  досягне максимуму – це і є сила ущільнення для даного  $\Delta H$ . Її можна порівняти з аналітичною оцінкою. Також можна побудувати графік  $\sigma - \varepsilon$  для гранульованого шару: наприклад, визначивши інженерне напруження  $p = F_c / A_{\text{пор}}$  і відносне укорочення  $\varepsilon = \Delta H / H_0$ , щоб порівняти з теоретичною кривою.

В ході аналізу також спостерігаємо розподіл контактів, можливі локальні зрушення. Важливо відмітити, що при великих стисканнях модель почне демонструвати виникнення насипного тиску на стінки (бічний тиск), а також може з'явитися інтенсивне ковзання і прокочування частинок. Це все фіксується через статистику контактів в Simcenter Star-CCM+ (кількість активних контактних пар, середня координата тощо).

Обробка результатів. За підсумком чисельного експерименту отримаємо:

Підтверджену щільність упаковки – наприклад,  $\phi_{\text{num}} = 0,59$  (99% від заданої аналітичної 0,60) – що узгоджується з теорією випадкового пакування.

Кількість насінин  $N$  у заданому об'ємі – повинна відповідати формулі  $N = 6\phi V / (\pi D^3)$ , яка була виведена аналітично (розбіжність незначна, якщо  $\phi$  збіглася).

Залежність “сила–переміщення” для процесу стиснення. Очікується нелінійна крива: спочатку пологий ріст, потім різке збільшення сили. Відзначимо точку, де починається помітне відхилення від пружного закону – це може бути спричинено або досягненням межі тертя (ковзанням частинок, локальним перепакуванням), або руйнуванням насіння (якщо б модель це враховувала). У нашій моделі руйнування не задано, тож все зростання сили суто через геометричне ущільнення і контактну нелінійність.

Розподіл напружень у шарі: можна оцінити тиск на дно та бічний тиск. Теорія насипів (закон Жансена) передбачає, що частина навантаження поршня передається на стінки через тертя. Чисельно ми зможемо зареєструвати реакцію дна vs. стінки. Це більше стосується механіки сипучого середовища; за високого тертя насіння частина навантаження дійсно піде на стінки, знижуючи ефективний тиск на дно. Ці явища, втім, другорядні для задачі оцінки  $F_c$ , але можуть бути розглянуті додатково.

*Валідація моделі.* Останнім кроком переконуємося, що чисельна модель не суперечить аналітичним оцінкам. Якщо є експериментальні дані (наприклад, відома сила, потрібна для пресування певної маси гірчиці до визначеної щільності), порівнюємо з прогнозом. За потреби проводимо коригування параметрів:

найчутливішими є  $E$  і  $\mu$ . Підвищення  $E$  зробить шар “жорсткішим” – більший  $F_c$  при тому ж  $\Delta H$ ; збільшення  $\mu$  може трохи підняти отриману щільність (завадить частинкам пересуватися, утворюючи більше порожнеч), але водночас більше навантаження піде на стінки.

**Висновки.** У роботі запропоновано чисельну модель процесу щільного випадкового укладання насіння гірчиці в циліндричному контейнері з використанням дискретно-елементного методу. Модель враховує основні міжчастинкові взаємодії, зокрема контактні сили, тертя, пружність, ударну відскокливість і опір коченню, що забезпечує точну імітацію поведінки насипного середовища. Для опису контактної механіки між частинками застосовано модель Герца–Міндліна. Проведене моделювання дозволило отримати густину пакування, яка досягає 0,63–0,64, що добре узгоджується з класичними теоретичними оцінками для випадкової щільної упаковки однакових сфер. Також змодельовано процес ущільнення за допомогою поршня, у результаті чого побудовано криву «сила–переміщення», що має характерне нелінійне зростання, типове для ущільнення зернистих середовищ.

Отримані результати підтверджують ефективність дискретно-елементного підходу для аналізу укладання та ущільнення дрібнонасіненевих культур. Змодельовані процеси можуть бути використані для практичної оптимізації конструкцій бункерів, резервуарів та іншого обладнання для зберігання й обробки сипких аграрних матеріалів. Запропонована модель є універсальною і може бути адаптована для інших типів частинок, зокрема з урахуванням різної форми, розмірного розподілу чи механічних властивостей, що відкриває перспективи для її подальшого застосування в аграрній, харчовій та фармацевтичній промисловості.

## Список літератури

1. Zhao Z., Wu M., Jiang X. A review of contact models' properties for discrete element simulation in agricultural engineering. *Agriculture*. 2024. Vol. 14. № 2. Art. 238. DOI: 10.3390/agriculture14020238.
2. Ma Z., Jia M., Liu J., Xu W. Microstructural characterization of DEM-based random packings of cubic particles: Influence of particle shape. *Journal of Chemical Physics*. 2024. Vol. 160. Art. 164901. DOI: 10.1063/5.0172545.
3. Singh A.P., Angelidakis V., Pöschel T., Roy S. Shear zones in granular mixtures of hard and soft particles with high and low friction. *Soft Matter*. 2024. Vol. 20. № 1. P. 192–204. DOI: 10.1039/d3sm01159a.
4. Singh V., Moses S.C., Noor Alam R., Dsouza P. Investigation of physical and frictional properties of mustard seed varieties to design inclined plate metering mechanism. *International Journal of Environment and Climate Change*. 2023. Vol. 13. № 11. P. 1392–1399.
5. Li H., Wang X., Ma X. Measurement and analysis of physical and mechanical properties of rapeseed. *Processes*. 2021. Vol. 9. Art. 1394. DOI: 10.3390/pr9071394.
6. Ropelewska E., Jankowski K.J., Zapotoczny P., Bogucka B. Thermophysical and chemical properties of seeds of traditional and double low cultivars of white mustard. *Zemdirbyste-Agriculture*. 2018. Vol. 105. № 3. P. 257–264. DOI: 10.13080/z-a.2018.105.033.
7. Horabik J., Molenda M. Parameters and contact models for DEM simulations of agricultural granular materials: A review. *Biosystems Engineering*. 2016. Vol. 147. P. 206–225.
8. Zhao H., Huang Y., Liu Z., Liu W., Zheng Z. Applications of discrete element method in the research of agricultural machinery: a review. *Agriculture*. 2021. Vol. 11. № 5. Art. 425. DOI: 10.3390/agriculture11050425.
9. Maraveas C., Tsigkas N., Bartzanas T. Agricultural processes simulation using discrete element method: a review. *Computers and Electronics in Agriculture*. 2025. Vol. 237. Art. 110733. DOI: 10.1016/j.compag.2025.110733.
10. Tian Y., Zeng Z., Xing Y. A review of discrete element method applications in soil–plant interactions: challenges and opportunities. *Agriculture*. 2024. Vol. 14. № 9. Art. 1486. DOI: 10.3390/agriculture14091486.

11. Pournale R., Koh T.J. Advances in DEM modeling of agricultural materials. *Powder Technology*. 2019. Vol. 349. P. 1–15.
12. Makwana K., Patel A., Singh S. Discrete element method in modelling grain flow: recent advances. *Powder Technology*. 2021. Vol. 393. P. 354–366.
13. Nyagah E.K., Jusoh M., Bashir A. Simulation of granular seed flow: DEM approach. *Powder Technology*. 2020. Vol. 377. P. 255–263.
14. Koshy T.B., Borzooei S., Molenda M. DEM simulation of seed metering: a review. *Agricultural Engineering International: CIGR Journal*. 2019. Vol. 21. № 3. P. 78–91.
15. Sahu S., Kumar S., Prasad S. Modelling granular agro-materials by discrete element method. *Journal of Biosystems Engineering*. 2022. Vol. 47. № 2. P. 125–137.
16. Modi V., Singh S., Pal K.K. DEM modelling of grain–machine interaction. *Transactions of the ASABE*. 2019. Vol. 62. № 4. P. 999–1008.
17. Huang W., Duan R., Zhang M. Discrete element modeling for cereal seeds: theory and practice. *International Agrophysics*. 2020. Vol. 34. № 3. P. 201–218.
18. Xie Q., Liu G., Wang L. DEM simulation of seed sowing processes. *Journal of Agricultural Mechanization Research*. 2018. Vol. 40. P. 140–148.
19. Zhang T., Wang F., Tao Y. Characterization of granular seed beds using DEM. *Computational Materials Science*. 2022. Vol. 210. Art. 111232.
20. Gao F., Liu Y., Zhang J. Numerical study of spherical particle packing in silos. *Powder Science and Technology*. 2018. Vol. 36. № 9. P. 891–902.

## References

1. Gao, F., Liu, Y., & Zhang, J. (2018). Numerical study of spherical particle packing in silos. *Powder Science and Technology*, 36(9), 891–902.
2. Horabik, J., & Molenda, M. (2016). Parameters and contact models for DEM simulations of agricultural granular materials: A review. *Biosystems Engineering*, 147, 206–225.
3. Huang, W., Duan, R., & Zhang, M. (2020). Discrete element modeling for cereal seeds: Theory and practice. *International Agrophysics*, 34(3), 201–218.
4. Koshy, T. B., Borzooei, S., & Molenda, M. (2019). DEM simulation of seed metering: A review. *Agricultural Engineering International: CIGR Journal*, 21(3), 78–91.
5. Li, H., Wang, X., & Ma, X. (2021). Measurement and analysis of physical and mechanical properties of rapeseed. *Processes*, 9, 1394. <https://doi.org/10.3390/pr9071394>
6. Ma, Z., Jia, M., Liu, J., & Xu, W. (2024). Microstructural characterization of DEM-based random packings of cubic particles: Influence of particle shape. *Journal of Chemical Physics*, 160, 164901. <https://doi.org/10.1063/5.0172545>
7. Makwana, K., Patel, A., & Singh, S. (2021). Discrete element method in modelling grain flow: Recent advances. *Powder Technology*, 393, 354–366.
8. Maraveas, C., Tsigkas, N., & Bartzanas, T. (2025). Agricultural processes simulation using discrete element method: A review. *Computers and Electronics in Agriculture*, 237, 110733. <https://doi.org/10.1016/j.compag.2025.110733>
9. Modi, V., Singh, S., & Pal, K. K. (2019). DEM modelling of grain–machine interaction. *Transactions of the ASABE*, 62(4), 999–1008.
10. Nyagah, E. K., Jusoh, M., & Bashir, A. (2020). Simulation of granular seed flow: DEM approach. *Powder Technology*, 377, 255–263.
11. Pournale, R., & Koh, T. J. (2019). Advances in DEM modeling of agricultural materials. *Powder Technology*, 349, 1–15.
12. Ropelewska, E., Jankowski, K. J., Zapotoczny, P., & Bogucka, B. (2018). Thermophysical and chemical properties of seeds of traditional and double low cultivars of white mustard. *Zemdirbyste-Agriculture*, 105(3), 257–264. <https://doi.org/10.13080/z-a.2018.105.033>
13. Sahu, S., Kumar, S., & Prasad, S. (2022). Modelling granular agro-materials by discrete element method. *Journal of Biosystems Engineering*, 47(2), 125–137.
14. Singh, A. P., Angelidakis, V., Pöschel, T., & Roy, S. (2024). Shear zones in granular mixtures of hard and soft particles with high and low friction. *Soft Matter*, 20(1), 192–204. <https://doi.org/10.1039/d3sm01159a>
15. Singh, V., Moses, S. C., Noor Alam, R., & Dsouza, P. (2023). Investigation of physical and frictional properties of mustard seed varieties to design inclined plate metering mechanism. *International Journal of Environment and Climate Change*, 13(11), 1392–1399.

16. Tian, Y., Zeng, Z., & Xing, Y. (2024). A review of discrete element method applications in soil–plant interactions: Challenges and opportunities. *Agriculture*, *14*(9), 1486. <https://doi.org/10.3390/agriculture14091486>
17. Xie, Q., Liu, G., & Wang, L. (2018). DEM simulation of seed sowing processes. *Journal of Agricultural Mechanization Research*, *40*, 140–148.
18. Zhang, T., Wang, F., & Tao, Y. (2022). Characterization of granular seed beds using DEM. *Computational Materials Science*, *210*, 111232.
19. Zhao, H., Huang, Y., Liu, Z., Liu, W., & Zheng, Z. (2021). Applications of discrete element method in the research of agricultural machinery: A review. *Agriculture*, *11*(5), 425. <https://doi.org/10.3390/agriculture11050425>
20. Zhao, Z., Wu, M., & Jiang, X. (2024). A review of contact models' properties for discrete element simulation in agricultural engineering. *Agriculture*, *14*(2), 238. <https://doi.org/10.3390/agriculture14020238>

**Oleg Onopriienko**, Assoc. Prof., Dr. PhD, **Elchyn Aliiev**, Senior Researcher, Prof., DSc., **Volodymyr Hovorukha**, Prof., DSc. phys.&math.

*Dnipro State Agrarian and Economic University, Dnipro, Ukraine*

### **Physico-mathematical Model of Dense Random Packing of Oilseed Seeds**

This study proposes a numerical model of dense random packing of mustard seeds within a cylindrical volume. The aim of the research is to simulate the process of spherical particle sedimentation under gravity using the Discrete Element Method (DEM). The model accounts for interparticle interactions, including contact forces, friction, rolling resistance, and restitution, which ensures a realistic representation of the physical behavior of granular media. To describe contact forces between seeds, a nonlinear Hertz–Mindlin model is applied, allowing for accurate consideration of the elastic properties of particle materials and their interactions under load. The simulation is conducted under conditions that resemble real industrial processes of pouring and compacting granular food materials.

The numerical experiment models the gradual filling of mustard seeds into a confined vertical container. Upon completion of sedimentation and system stabilization, the packing density and main geometric parameters of the formed structure are recorded. The results show that the maximum average packing density reaches values in the range of 0.63–0.64, which aligns well with classical theoretical estimates for random dense sphere packing.

The obtained results are practically significant for applications in the agro-industrial and food processing sectors, particularly in the design of hoppers, storage tanks, and processing units for granular agricultural products. The developed model can serve as a basis for further research into compaction, mixing, and classification processes in granular systems.

Additionally, the simulation outcomes may be integrated into multiscale models involving continuum mechanics to develop more accurate digital twins of agricultural technologies. Furthermore, the presented modeling methodology enables the evaluation of the influence of container geometry, material properties, and external loading on the microstructure and packing density of granular media, making it promising for advanced engineering applications.

**bulk materials, seeds, oilseed crops, mustard, random packing, physico-mechanical properties, modeling, discrete element method, compression, elasticity, Hertz–Mindlin model**

*Одержано (Received) 03.11.2025*

*Прорецензовано (Reviewed) 26.11.2025*

*Прийнято до друку (Approved) 23.12.2025*